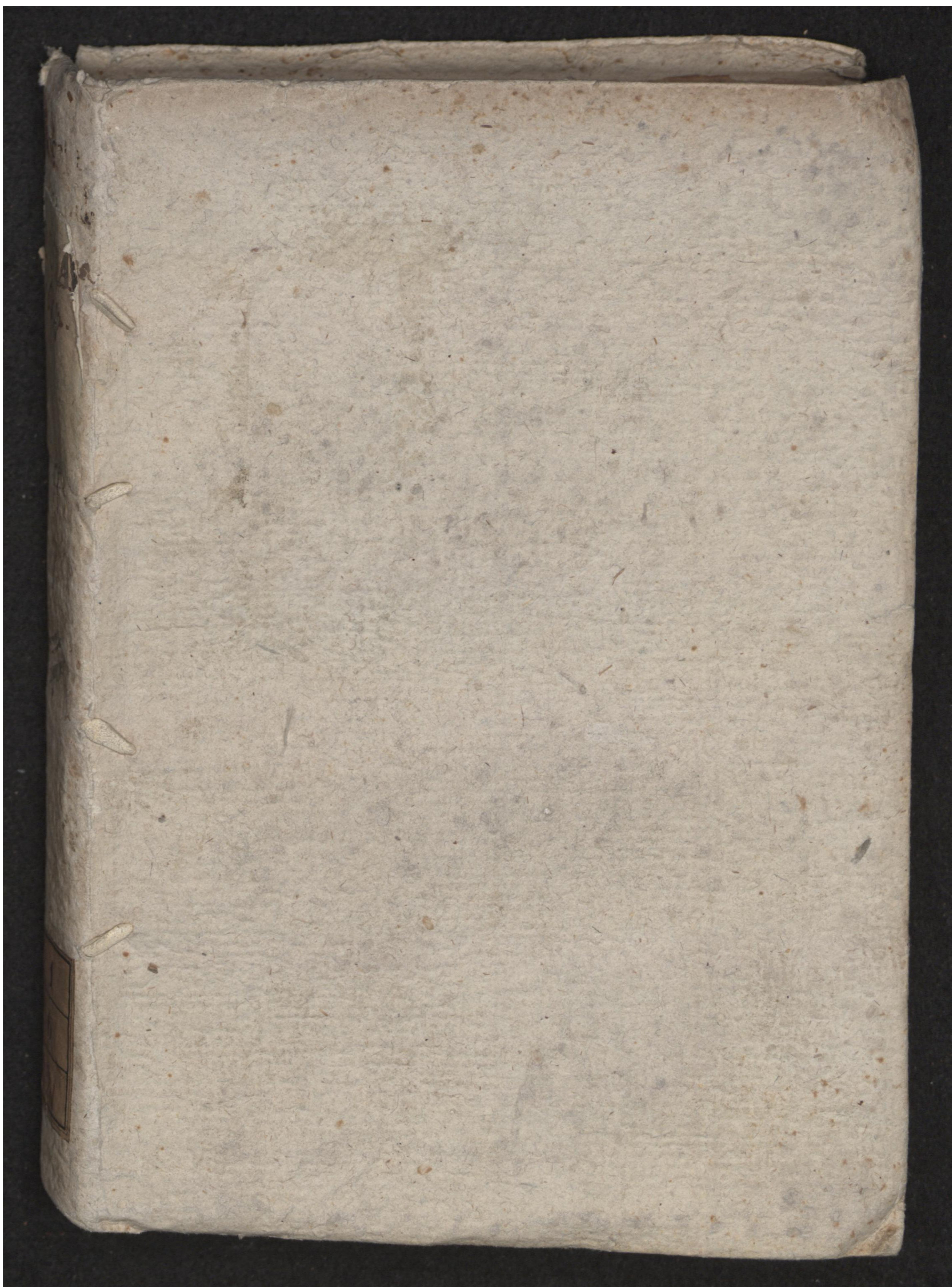
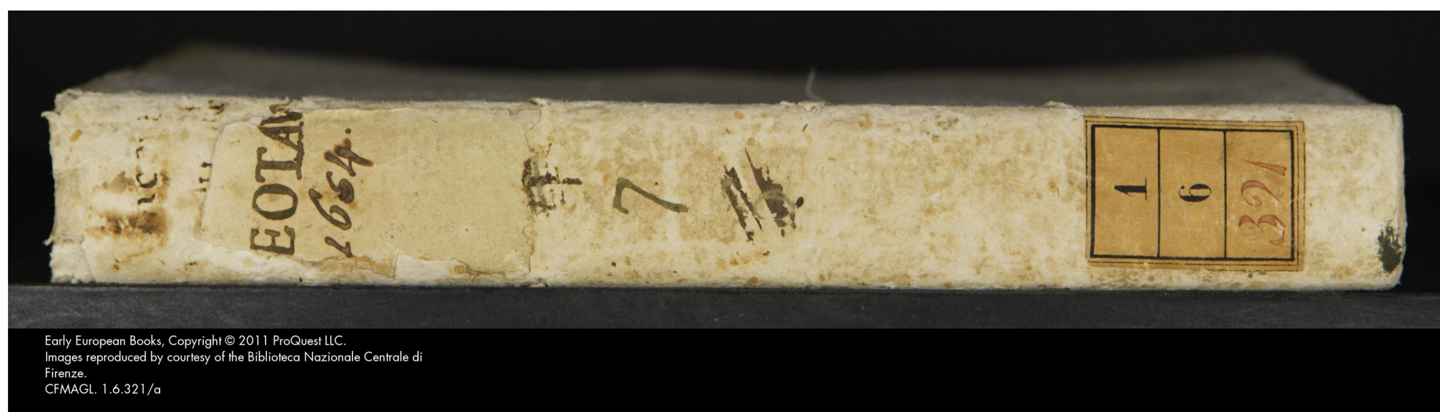
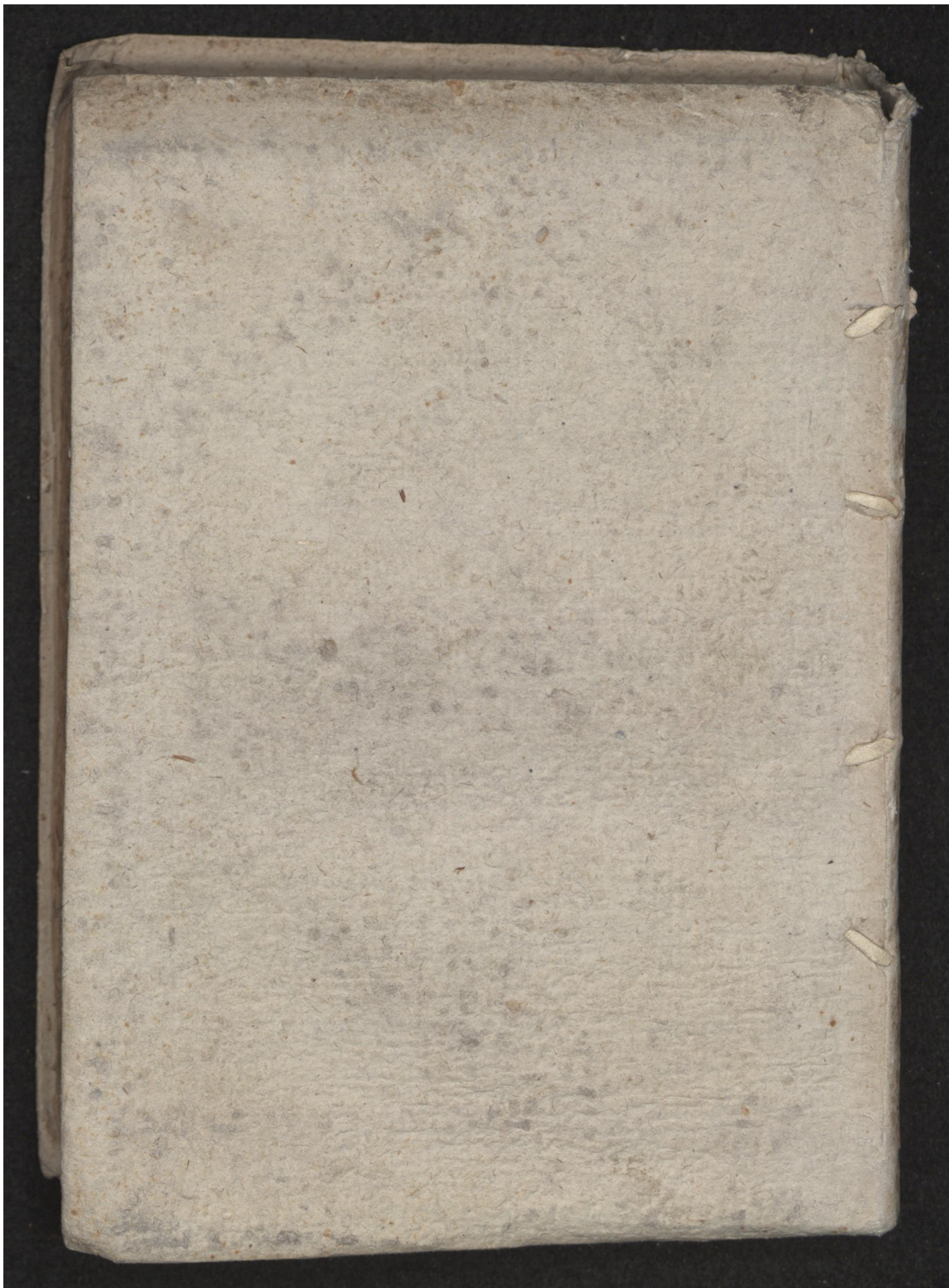












1 K. 6

B

~~L. Diuentio~~

VII

VI

~~a S. VINC~~. Leotau.
1634

CVRVILINEORVM
AMOENIOR
CONTEMPLATIO.
NECNON
EXAMEN
CIRCVLI QVADRATVRÆ,
A R.P. GREG. A S. VINCENTIO
SOC. IESV PROPOSITÆ.







EXAMEN
CIRCVLI QVADRATVRÆ
HACTENVS EDITARVM CELEBERRIMÆ,

quam APOLLONIVS alter, magno illo
PERGÆO non minor Geometra,

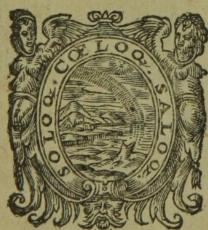
R. P. GREGORIVS A SANCTO VINCENTIO
Societatis IESV, *Expoſuit.*

Authore VINCENTIO LEOTAVDO Delphinate,
eiuſdem Societatis.

*Cuius operâ è tenebris ſimul emergit perelegans
& peramœna*

CVRVILINEORVM CONTEMPLATIO:

Olim inita ab Illuſtriſſimo & Reuerendiſſimo D. D.
ARTVSIO DE LIONNE, Epiſcopo & Comite
Vapincenſi, & Abbate Solignacenſi,
Regióque Conſiliario.



LVGDVNI,
Apud GVILLELMVM BARBIER, Typographum Regium.

M. DC. LIV.
CVM PRIVILEGIO REGIS.



Nobilissimo & Amplissimo D. D.

HVGONI DE LIONNE,

MARCHIONI DE BERNI, DOMINO de Frenes, à Regiis Consiliis Ordinario, Regiæ militiæ Sancti Spiritus Commendatori, Ordinúmque Regiorum Ritibus Præposito & Supremo Magistro.



D te (Vir Clarissime) *tua æternùm alioqui peritura defero, quæ tibi cùm non possint non esse acceptissima, à colendissimo scilicet Parente tuo Præsulum Vapincensium non obscuro lumine profecta, non ingrata etiam tibi alia quædam fore censui, quæ his è facultate mea sanè tenui, petita accederent. Hæc vtraque, vt se habeant, quóve in genere versentur, tibi paucis aperio. Vt momenti in Mathematicis disciplinis grauissimi, ita grauissimæ difficultatis apud Geometras habitus semper fuit ille nodus, qui rationem spatium circu-*

lare in rectilineum conuertendi plexibus adeò cæcis inuoluit: vt nulla eorùm, summorum, infimorum, industria eum expediendo par hactenus fuerit. Eundem adorsus est postremus, loco non postremo censendus, nobilis Geometra è Societate nostra, R. P. GREG. A S. VINCENTIO, *cuius in omni Matheseos genere eximia facultas omnibus iampridem nota, notum etiam diuturnum hanc in rem ab eo impensum studium, in spem non dubiam Geometras adduxêre, se posthac tantæ huius difficultatis tam expetitâ solutione, eius ope, non cárituros; illiúsque quantociùs potiundæ desiderium accendêre vehementer. Hæc à me quoque hisce disciplinis incumbere solito spes concepta, hoc idem conceptum desiderium. Sed quàm inanis illa, tam hoc irritum in remotis Alpium nostrarum Cottiarum iugis futura erant: nisi Illustrißimi Præsulis Parentis tui, de omnibus bene mereri soliti, propensa etiam erga me voluntas occurrisset. Vt enim hoc Geometricum opus, Quadraturæ præsertim nomine spectandum publico iuri tandem commissum, ipsi primùm innotuit (innotuit autem hisce in locis aliquantò tardiùs) summâ diligentiâ illud conquiri; paratúmque, ab ipso vix apertum ad me transmitti curauit. Atque vt votis meis quam cumulatißimè satisfaceret; subtilem*

æquè

æquè ac iucundam circa Cyclica contemplationem, olim dum in ludo literario versaretur, & in Geometricis genium suum exerceret, susceptam, eidem operi comitem adiunxit: eo solùm pro tanta gratia mihi imposito onere, quàm ipsa species ferat, sanè grauiore: vt quid de hac noua tam celebri Circuli quadrandi ratione sentirem ipse: quid à se sentiri vellem, cum primùm liceret, aperirem. Obsequi conatus sum (quî enim viri grauissimi iuxtà ac officiosissimi nutui vel minimo non obsequerer?) Posthabitis omnibus huic vni cogitationi incubui: Tetragonismum hunc mente assequi complectique conatus sum: quidquid in Geometricis facultatis, quidquid in Arithmeticis paratum mihi aliquando fuisset; totum excussi, exhausi totum. Non perinde tamen altissimum gurgitem mihi quidem licuit exhaurire difficultatum: quæ hanc circulum in rectilineam formam fingendi rationem non tam dubiam; quod in Mathematicis euidenti tantùm demonstratione niti solitis, vim condemnationis obtineret: quàm defectûs alicuius compertam suadere videantur. Hanc ergo sententiam meam suis rationibus ac fundamentis stabilitam, & methodo, quam in re difficillimâ licuit maximè expeditâ traditam, cùm Illustrissimo Præsuli, vt expetierat, exhibuissem: eâ gratulatione, quæ eius est

beni

benignitas, eandem excepit: vt non luce tantùm eam dignam assereret, sed nec Geometras sine Geometriæ dispendio diutiùs latere posse pronunciaret. Cui cùm virorum aliquot non imperitorum par sensus suasúsque accederet: ipsiúsque adeò Authoris Quadraturæ (adeò verum est; vt quisque doctior est, ita demißiùs de se sentire, ac loqui modestiùs) non modò non aliena foret; quin etiam, vt certo nuncio perlatum est, propensa voluntas; in assensum ab eo pellici me passus sum: passus tamen eâ conditione, vt & ipse suam, quam penes me haberem, de Cyclicis commentationem, vnà cum meo illo Quadraturæ nouæ examine, edi pateretur. Hîc virum optimum, suorum parum æquum æstimatorem, vehementer abnuere, obijcere lucubratiunculam illam suam, quam olim animi tantùm gratiâ susceperat, non esse eiusmodi, vt cum grauißima disceptatione circa grauißimam difficultatem de Tetragonismo ortam, aptè poßit copulari. At me contrà suadere, hortari, certum ac fixum declarare, censuram illam meam, vt paucis per se suauem, nisi suorum Cyclicorum amœnitate condiretur, ita non omnibus apponendam. Effectum tandem, eius vt assensum, si minùs verbo, quod fuisset optatius; saltem silentio nutúve, quod abundè est, consecutus sim. En igi-

tur

tur tibi, Vir Clarissime, *hoc vtrumque opus: quod non tam rerum quæ tractantur connexione, (etsi in iis nonnullam obseruare liceat) quàm Authorum necessitudine, eósque inter statuto, cuius memini, pacto; vnum in volumen coaluit: quo non aliud vel gratius futurum tibi; vel à te cariùs fouendum, iure mihi persuasum est. Hæ nimirum sunt ab amantissimo obseruandissimóque Parente tuo tum olim initæ; tum nuper mihi imperatæ vigiliæ. Noui equidem alia non pauca præ iis longè clariora, quibus ipse meritò glorieris, eius ornamenta. Noui, quod Delphinatium neminem latet, quantâ cum integritatis famâ Senatorem primùm egerit: quo in Deum pietatis studio, (postquàm Nobilissima piissimáque Genitrix tua, D. Isabella de Seruien, quæ in ipso Adolescentiæ flore te Semestrem reliquit, è viuis erepta est,) abiecto forensi strepitu, aliísque mentem fatigare solitis curis, sanctiorem vitæ Clericalis statum amplexus fuerit. Quem dum pro votis colit: non potuit pientissimum Regem, diuiníque cultus promouendi studiosissimum Ludouicum Decimumtertium memoriæ triumphantis, eius probitas doctrináque singularis latere: qui bonorum omnium cum gaudio plausúque ad Vapincenses Infulas ipsum excitauit: quas eâ cum dignitate tuitus est, vt aliquot*

ẽ *post*

pòst annis in Metropolitanâ Ecclesiæ Ebredunensis Sedē, ex sui illius Europâ totâ celeberrimi, piísque tot gestis apud posteros, superósque, vt pium est sentire, immortalis, Guillelmi d'Hugues obitu vacantē, ipsum prouehi mandarit paternæ in eundem voluntatis hæres Ludouicus Decimusquartus: ratus scilicet, nec immeritò, se acerbum illum Ebredunensium luctum non mediocriter liniturum, si lucidissimi Solis sui occasum non absimilis ortu recrearet. Verùm tunc etiam consuetæ moderationis suæ non oblitus, quâ laude se eo munere dignum præbuerat: eâdem statuit ab eo abstinere: illúdque, (quo Ebredunenses deuinxit non mediocriter) Viro cessit, & genere, & doctrinâ, & eloquentiâ, virtutúmque cæterarum Archipræsule dignissimarum laude clarissimo, Georgio Aubussonio Comiti de la Fueillade. His, inquam, pluribúsque alijs, quæ suauissimum Parentem commendant tuum; tibíque adeò splendorem conciliant non obscurum, ornamentis, collatum hoc eius specimen ingenij, tenue quispiam, leuísque apud te ponderis futurum fortasse censebit. At verò mea longè alia sententia est: nihil enim à summis viris profectum vel leue censeri debet, vel memoriâ posterorum non dignissimum: solétque quidpiam, etsi leuius, à iacturâ seruatum & de nouo partum,

tum, iam partis illustrioribus & in tuto positis voluptatem afferre maiorem. Ita præterea naturâ comparatum est, vt maiorum gesta singula, studiáque etiam leuiora, suaui quodam cum sensu memoriâ repetant posteri: vt non paruam apud te gratiam ob hanc Cyclicorum contemplationem (quam Geometris aliquot non infimæ notæ maximè probari comperi) ab interitu seruatam, me initurum confidam: quam mihi cumulatißimam, vt ab ingenuis moribus tuis sperari par est, rependeris, si posteriorem exigui huius voluminis partem, quâ examen & censuram arduæ illius Quadraturæ Circuli prosecutus sum, eodem quo priorem, tuis rebus iure per se accensam, studio complecti præsidióque tueri minimè graueris. Quod enim huic meæ lucubrationi parare poßim eo firmius: quod & Paterni, Lionnæorum; & Materni, Seruientiorum, stabilit generis claritas: quod maturum consiliũ, singularísque solertia, quâ res grauißimas tum in Italia, tũ in Gallia ab ipsa vix ineunte adolescentiâ ad fœlicem exitum perduxisti, commendant: quod ex graui illo munere à iussis sanctionibúsque Principum nostrorum, quo cum laude perfunctus es, momentum admittit non leue. Quod denique experturus sum inconcussum, quando ad tam multa, quibus splendes, ornamenta, ex

Regia in te munificentia, ea denuò facta est accessio, vt Regiorum Ordinum Torquatorum ritibus præsis summus Magister. Non minore sanè mihi opus erat patrocinio; quò animum, (quem materiæ cum grauitate coniuncta difficultas, & Geometræ, quem petere videor, eximia facultas, meóque omni conatu longè superior, deterrebant,) tandem inducerem, vt hasce meas obseruationes luce frui publicâ paterer. Ad quod non leuiter etiam impulit, quòd iis Illustrissimi Præsulis lucubrationem non tam comitem quàm ducem præficere mihi licere cernebam. Hæc igitur vt in aliquod obseruantiæ in te meæ, quam impensè colo, testimonium excipias, etiam atque etiam rogo,

VIR AMPLISSIME.

Deuotus tibi, tibíque obsequentissimus seruus, VINCENTIVS LEOTAVDVS è Societate IESV.

Ebreduno, a. d. VI. Non. Maij 1654.

AD



AD LECTOREM
Monitum perutile.



TE, Beneuole mi Lector Geometra! latere non opinor opus non vulgare. Quem enim tota in Europa lateat Geometriæ studiosum? quod R. P. GREGORIVS A SANCTO VINCENTIO, Societatis nostræ, maximo cum rei totius Mathematicæ incremẽto, aliquot antè annis publici iuris fecit. Illud ad me sanè, in his Delphinatium Alpibus commorantem, non nisi tardiùs; pro voto certè, quod apud me nota pridem Authoris doctissimi fama concitarat, non nisi tardissimè accedere potuit: accessit tamen aliquando. Quo vbi primùm potiri licuit, auidissimæ cupiditati satisfaciendi gratiâ, dum amplum volumen à capite ad calcem, vt fit, verso reuersóque: obruor eximiâ selectáque rerum hactenus inauditarum copiâ & varietate: tersâ grauíque subtilia quæque probandi methodo capior rapiórque. Authoríque gratulor ea demum ab eo præstita, quæ de eo pridem conceptam ex fama opinio-

nem licèt maximam, longè ſuperarent. Quanquam verò toto hoc in opere nihilnon digniſſimum admiratione occurrerit: illud tamen præ cæteris ad ſe mentis aciem meritò conuertit, quod veluti tantæ huius lucubrationis ſcopum vnicum ſibi præſtituit doctiſſimus Geometra: Circuli ſcilicet tot iam retrò ſæculis, tanto támque irrito conatu quæſitus Tetragoniſmus. Cuius enim ſtudium, illum è tenebris nunc primùm emergentem intuēdi, cupido non accendat? eóque vehementiùs, quò longiùs nota Artificis eximia facultas, vel hoc ipſo ſolo opere teſtatiſſima, omne dubium de propoſiti conſecutione auertat. Reliquis ergo interim omiſſis, huic vni operæ mentem adieci: vt totius huius Quadraturæ rationem vniuerſam, exploratam planéque perſpectam haberem. Quod tum demum me aſſecuturū cenſebam: ſi quæ à ſummo Geometra, è Geometriæ legibus ſtatuta, ad Arithmetices iudicium, quo nec æquius, nec apertius reperire eſt, cuncta referrem. Id verò dum molior, dici vix queat, quot quantæve occurrêre difficultates. Conica ſunt, hoc eſt ſublimioris Geometriæ reconditiores facultates, è quibus ferè ſolis tota hæc Quadratura petitur. Quodnam deinde numeros inter & Conica commercium? Adde, volatui magis quàm ingreſſui aſſuetum Authorem, per prærupta æquè facilè ac per plana contendere, quò vix

liceat

liceat perreptare. Sed improbo & obdurato conatui nulla non solet cedere difficultas. Euasi tandem ad æquissimum Arithmetices tribunal, à tabulis calculi multiplicis ex eius iure confecti non omninò imparatus. Quid sententiæ pronunciatum? aliud fortasse quàm ferat iam concepta communis opinio. Quid porrò? Quadruplicem hanc Quadraturam necdum hac vice ita suis numeris omnibus absolutam videri, vt omne defectûs discrimen euadat: atque adeò neque à se, neque à coniunctissima sorore Geometria, vt veram & certam, qualis desideratur, admitti posse. Cuius sententiæ æquitas, vt cuiuis aperta sit & euidens, liceátque omnem dubitationis huius causam perpendere: perscribo quæcunque ad id conferre visa fuere.

In tres itaque partes, siue Libros, totum hoc examen distributum est à me. Quorum primus in Rationum natura satis alioqui obscura, pleniùs planiúsque exponenda totus consumitur. Earum enim cognitio, vt ad res omnes Geometricas vtilissima futura est; ita ad propositum mihi scopum apprimè est necessaria: quando ex earum visceribus suam Circuli quadrandi rationem ferè totam hausit Geometra noster. Qui licèt eas omnem in partem versarit, mirásque earũ facultates exposuerit fusissimè: Quia tamen in tanta rerum copia (nihil enim eâ tractatione copiosius) difficile sit ea seligere quæ

huic

huic institutoin seruire queāt: Quia etiam in sola traduntur quantitate continua; cùm tamen ad discretam cuncta reuocare nunc propositum sit: Quia denique præruptior probandi methodus ab Authore vsurpata videatur: ideò collectior, & ex numeris petita, stylóque mansuetiore inita tractatio tradetur. In qua non leue duces, demonstrationem haberi Principij illius: quo à Geometris pronunciatur, Rationem quantitatis vnius ad alteram, componi ex Rationibus quantitatum quarumlibet inter duas illas quantitates interiectarum. Quod hactenus, vel ipso Geometra nostro teste, *Lib.* 8. *Princ* 2. eo tantùm iure à Geometris est admissum, quòd nihil vnquam absurdi ex eo consecutum sit: & vt Principium admittendum est, inquit idem, *donec ratio alicui occurrat, hoc ipsum Geometricâ demonstratione inter Theoremata reducendi.* Reductum igitur reperies hoc *Lib.* 1. *Prop.* 22.

Secundus verò Liber eò refertur totus, vt primam & fortasse præcipuam è quatuor Quadraturis ab Authore expositis, numerorum iudicio subiiciat. Quod tandem satis ex voto, sed operâ, mihi crede, non leui videor consecutus. Multa ergo præmittuntur quasi Lemmata ad solidas quantitates illas spectantia, quas primus magnus hic Geometra mirabili industriâ, magnóque cum huius disciplinæ incremento, in Geometriæ thesaurum contulit: quæ scilicet

ex

ex planorum per plana decurrentium vestigiis siue ductibus ortum habent. Licèt enim ipse primus earum Author, solidas huiusmodi quantitates Libro suo septimo sanè amplo sit fusè prosecutus: nonnulla tamen ad institutum meum vel addenda fuere, vel compendiosiùs & ad calculum aptiùs, exponenda: ea certè seligenda, quæ præ cæteris necessaria videbantur. Occurret autem ad Propositionem 27. iucunda de angulis præsertim contingentiæ digressio, cui Author Lib. 8. Princip. 1. præbuit occasionem.

Tertius denique Liber, quanquam secundæ solius Quadraturæ examinandæ totus impendi videatur: quia tamen duæ reliquæ, tertia & quarta, eâdem methodo, iisdémque Principiis stabiliuntur ab Authore, easdem vnâ eadémque operâ discutit. Varij ergo singulares casus ex numerorum iudicio expenduntur: quorum si vel vnicus (quid si plures) defectûs alicuius condemnetur; haud dubium quin seruato Logicorum iure, Tetragonismus ipse totus vitio laboret. Huic ratiocinio aliud accedet ex Propositione 77. lib. 10. Authoris petitum, quod vi non minore hasce Quadraturas concutere videatur.

In singulis verò huius exercitationis partibus tribus is ordo obseruatus est, vt perpetua pergat Propositionum series, nullo Axiomatum,

Definitionum, Theorematum aut Problematum discrimine: quæ omnia, generali designo Propositionis voce: sic enim & ipsa faciliùs percipi; & ea in quorum gratiam afferuntur, clariùs demonstrari, cùm non à longè petatur argumentum, compertum est experientia. Si quid præter hæc, fuerit obseruandum, suo quodque loco reponetur, nihil vt nisi vnum, quod hîc moneam, supersit.

Nimirum, etsi quidpiam hoc in opere Geometrico ad absolutam Tetragonismi cognitionem, desiderari videatur: absit tamen vt apud Geometras Diuinum illud opus Geometricum minori in pretio habeatur. Huic equidem toti à Circuli Quadratura nomen inditum est ab Authore, eo fortasse consilio, quòd Problema præ cæteris omnibus celebre ad Quadraturam Circuli spectans in eo pertractetur: Quàm multa tamen scitu dignissima exhibentur ab huiusmodi Problemate omninò aliena. Perpende priores ipsos nouem totos Libros operis huius Geometrici: quid in his obserues adeò Tetragonismo alligatum? Imò ipsum etiam decimum & vltimum Librum Quadraturis peculiariter destinatum percurre: si paucas admodum Propositiones exceperis, quæ mihi probari, sicuti & Tetragonismi quatuor ex iis collecti, non potuere: reliqua non nisi summo Geometræ dignissima obseruaturus es.

MONITVM.

Reſtat vt aperiam, quâ ductus ratione huic meo Tetragoniſmi examini, Curuilinea ab Illuſtriſſimo Præſule obſeruata præmiſerim: non eâ quidem, quòd ex iis ad inſtitutum meum (quanquam nec ab eo aliena omnino ſunt) aliquid auxilij petiturus eſſem: ſed ne eo ſanè periucundo opuſculo æternùm careret Geometrica diſciplina. Nolim enim te latere, Virum optimum, morumque ſuauitate & doctrina ſingulari commendatiſſimum, vt primùm in manus eius peruenit opus illud præſtantiſſimum Reuerendi Patris Greg. a Sancto Vincentio; illud ad me, cui ſciret acceptiſſimum fore, pro ſua benignitate deferri curaſſe, vnáque illam Cyclicorum commentationem ſuam olim tenerâ adhuc ætate animi gratiâ ſuſceptam, & ex eo obliuioni diuturnæ traditam, æternæ etiam tradendam, niſi opus vtcunque affine Patris Gregorij, eius memoriam reuocaſſet. Cùm ergo Geometræ aliquot exercitatiũculam illã meam circa Patris Gregorij Tetragoniſmos extorquerent à me: æquum planè cenſui, nec à re Geometrica alienum, & illis tibíque cumulatiùs ſatisfactũ iri: ſi cum illa opuſculum hoc, quamuis renitente & obteſtante Authore, ſimul exhiberem, æternâ alioqui obliuione ſepeliendũ; quod eo animo à te excipiendum ſpero, quo Author, quo & opus meretur; quo etiam ipſe & illius & meæ lucubrationis te participem facio.

PARS PRIMA

ILLVSTRISS. AC REVERENDISS. D.

ARTVS DE LIONNE,

EPISCOPI, AC COMITIS
VAPINCENSIS, ABBATIS
SOLIGNACENSIS, AC REGII
CONSILIARII,

A M OE N I O R

CVRVILINEORVM
CONTEMPLATIO.



INDEX,

Siue Synopsis Partis Primæ, De figuris Cyclicis.

Vt excogitata ab Hippocrate Menoïdes, siue Lunula, meditationis huius instituendæ causam præbuit: ita priori loco ipsa debuit exhiberi. Primis ergo Propositionibus, nimirum:



ROPOSITIONE 1. *pag.* 1. 2. *pag.* 2. 3. *pag.* 3. 4. *pag.* 5. 5. *pag.* 6. 6. *pag.* 7. 8. *pag.* 11. *Exponitur ipsa forma Lunulæ Hippocrateæ. Eiusdem constructio. Æqualitas cum Rectangulo triangulo Isoscele: Tum linearum eam componentium potentia attenditur, & ex ipsis datis eam construendi modus aperitur: ac tandem cuiuis rectilineo dato æqualis Lunula Hippocratica exhibetur.*

Prop. 9. *pag.* 12. *Similes Circulorum sectores definiuntur.*

Prop. 10.

æqualis

Prop.38. pag.72. Ostenditur circulus Pentagono regulari , & aliis regularibus figuris Pentagonum numero laterum superantibus circumscriptus , maior esse semicirculis omnibus circa latera polygoni descriptis : eóque maior quò Polygonum pluribus lateribus constabit.

Prop. 39. pag. 79. Exhibetur modus sectorem circuli ad alium sectorem reuocandi æqualem , & alteri dato sectori similem ; ad cuius angulum angulus illius rationem habeat notam. Vnde seges copiosissima nascitur omnia polygona regularia transformandi in mixtas figuras.

Prop.40. pag.84. Prop.41. pag.86. Prop.42.pag.88. His tribus Propositionibus via aperitur ; qua præter opinionem omnem ; omnia quæ lib. 2. Eucl. traduntur de rectangulis ex varia linearum sectione ortis : ad circulos vel Ellipses transferri queant. Nec quæ Euclides tantùm lib.2. sed quæ lib.10, quæ etiam Alij passim circa rectangula , & Quadrata , quæ varia sectio lineæ rectæ generat , demonstrarunt ; eadem omnia circulis & Ellipsibus æquè conueniunt, vt ex hoc breui specimine cuique licebit colligere absque longiori applicatione singulorum, quæ volumen conderet immensum.

Prop.43.pag. 89. Explicat quid vocetur complementum duorum circulorum. Tum demonstratur , illud esse medium proportionale inter duos circulos , quorum est complementum. Ostenditur demum in Scholio iucundissima symbolizatio inter huiusmodi Cyclica complementa

circulorum

quo

PROPOSI



PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. DEFIN.

Lunula Hippocratis eſt figura conuexo-caua ſemiperipheria circuli,& alterius circuli quarta parte peripheriæ circumſcripta.

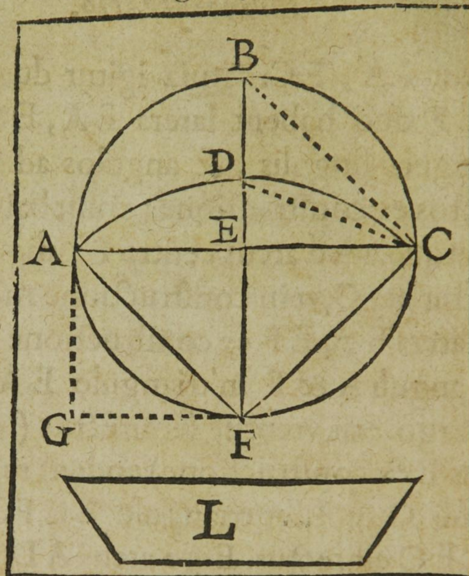
EXPOSITIO.



ELEBERRIMA eſt hæc figura tum antiquitate, tum Authorum primæ notæ commendatione, tum etiam ipſa ſua ſubtilitate & elegantia, vt non immeritò frontem occupare debuerit huius exercitationis meæ: cuius etiam auſpicandæ præbuerit occaſionem.

Eſto itaque ſemicirculus A B C, arcus verò ADC, ſemicirculum ſecans in A & C, ſit quarta pars alterius cuiuſdam circuli. Erit figura conuexo- caua A B A D C Lunula, quæ à primo eius Authore, Hippocratis dicitur: quæque etiam, ſicut & reliquæ huiuſmodi figuræ conuexo-cauæ, duobus circuli arcubus quibuſcumque ſeſe vel ſecantibus vel tangentibus *Fig. I.*

Figura prima.



comprehensæ, dici ſolent Meniſcus aut Menoïdes, à falcatæ ſcilicet lunæ ſimilitudine: cui congruit etiam vox noſtra Gallica *Croiſſant*.

PROP. II. PROBL.

Lunulam Hippocratis conſtruere.

Conſtructio.

Super linea qualibet recta A C deſcribatur ſemicirculus A B C, cuius centrum eſt E: per quod ad A C ducatur perpendicularis E F æqualis radio E A vel E C. Centro verò F, radio F A, arcus A D C deſcribatur, tranſiturus neceſſariò per C, vt mox patebit. Dico figuram duobus arcubus A B C, A D C, clauſam eam eſſe, quæ conſtruenda proponitur.

Demon

Demonstratio.

Ducantur F A, F C. Quia igitur duo triangula E A F, E C F duo habent latera E A, E F : E C, E F æqualia singula singulis, & angulos ad E æquales, nempe rectos ex constructione: erunt bases F A, F C æquales: atque adeo arcus centro F radio F A descriptus transibit per C, vt in constructione monui. Quia verò duo latera E A, E F ex constructione sunt æqualia: erunt anguli A & F in triangulo E A F æquales inter se. Ergo erit vterque semirectus (rectus enim est angulus E ex constructione) eodem iure semirecti erunt anguli C & F in triangulo E C F. Ergo totus angulus A F C est rectus. Ergo arcus A D C est quarta pars peripheriæ sui circuli. Clauditur ergo constructa Lunula A B C D A semiperipheriâ A B C vnius circuli, & quarta parte A D C peripheriæ alterius circuli priorem secantis in A & C. Ergo per Prop.I. ipsissima est lunula Hippocratis. Quæ construenda erat.

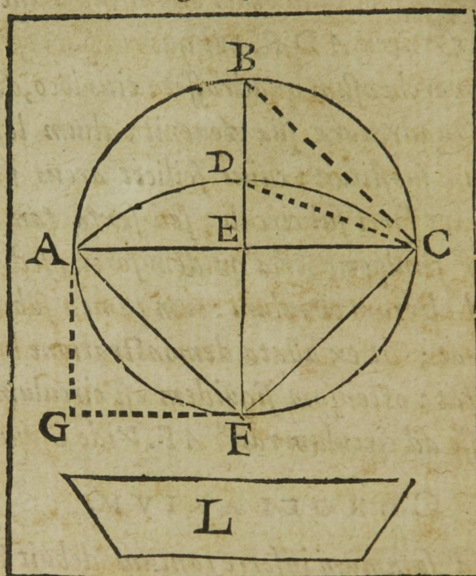
PROP. III. THEOR.

Superior Hippocratis Lunula æqualis est triangulo rectangulo A F C super diametro A C semicirculi A B C descripto: cuius duo latera sint radij arcûs A C D. *Fig. I.*

Demonstratio.

In triangulo rectangulo A E F, Quadratum baseos A F æquale est duobus Quadratis simul laterum *Fig. I.*

Figura prima.



E A, E F: siue duplum Quadrati alterutrius horum laterum æqualium, verbi gratia lateris E A. Cum ergo circuli ita se habeant inter se per 2. lib. 12. vt Quadrata diametrorum atque adeo per 15. lib. 5. vt Quadrata semidiametrorum: erit circulus radij A F duplus circuli, radij A E. Ergo & semicirculus radij A F duplus semicirculi radij A E, hoc est, semicirculi A B C. Semissis ergo semicirculi radij A F siue Quadrans F A D C, æqualis est semicirculo A B C. Dematur commune segmentum A D C: remanebit Lunula A B C D æqualis triangulo rectangulo A F C. Quod erat probandum.

SCHOLIVM.

Hinc deducebat Chius ille Geometra, vt videre est apud Clauium

Clauium lib.7. Geom. pract. circuli tetragonismum; sed syllogismo Pseudographo. Cum enim Meniscum hunc semiperipheria A B C. & arcu A D C, qui quarta pars est peripheriæ sui circuli, comprehensum quadrasset: eius loco, dum ad constructionem Quadraturæ suæ deuenit; alium longè diuersum Meniscum substituit: cuius scilicet arcus interior non iam quarta pars foret sui circuli, sed sexta tantùm: arcus verò exterior semiperipheria quidem foret; sed circuli subquadrupli ad alterum circulum: cum tamen subduplus tantùm esse debeat; vt ex allata demonstratione huius propositionis constat: ostensum siquidem est circulum radij A E subduplum esse ad circulum radij A F. Vide Clauium loco cit.

COROLLARIVM.

Quare ad summum inferre tantum debuit Hippocrates *ex suæ huius Lunulæ tetragonismo circulum Quadrari posse; cum æqualitas tam elegans inter curuam & rectilineam figuram reperiatur: non tamen à se reuera quadratum fuisse.*

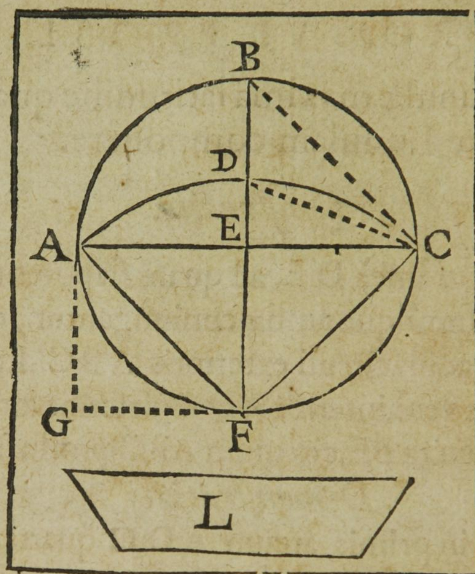
PROP. IV. THEOR.

In eadem figura: radius E B, ita in D diuiditur ab arcu A D C: vt pars D B (quæ est maxima Lunulæ latitudo) ad reliquam D E sit potentiâ, dupla.

Demonstratio.

Ducatur recta D C. Angulus A F D duplus est anguli A C D per 20. lib. 3. Sed angulo A F D æqualis est angulus A C B. Ergo angulus A C B duplus est anguli A C D. Cum ergo angulus A B C bifariam *Fig. I.*

Figura prima.



diuidatur à recta C D; ita erit per 3. lib. 6. B D ad D E, vt B C ad C E; sed B C ad C E est potentiâ, dupla. Ergo & B D erit potentiâ, dupla lineæ D E. Quod erat probandum.

PROP. V. THEOR.

In eadem figura, dupla lineæ D E potentiâ est dupla lineæ B D.

Demonstratio.

Fig. I. Quadratum lineæ, quæ sit dupla lineæ D E, quadruplum est quadrati super linea D E; sed quadrati super linea D E, duplum est quadratum super D B. Ergo quadratum super linea, quæ sit dupla lineæ D E, duplum

duplum eſt quadrati lineæ B D; ergo illa eſt potentiâ, huius dupla. Quod erat probandum.

PROP. VI. PROBL.

Datâ Lunulæ maximâ latitudine quâcunque B D, ipſam Lunulam componere.

Conſtructio.

Reperiatur linea D E, ad quam ſit potentiâ, dupla linea B D: ſimúlque ambæ coniungantur, erit compoſita E B radius circuli exterioris A B C Lunulæ futuræ. Arcus verò interior A D C deſcribetur centro F, in quo producta BE, circulum ABC productum ſecat. *Fig. I.*

Demonſtratio.

Conſtat in primis arcum A D C quartam partem eſſe peripheriæ ſui circuli, eſt enim angulus A F C rectus in centro; conſtat etiam radium A F eiuſdem arcus A D C eſſe potentiâ duplum radij E A, ſemicirculi A B C, reſtat ergo probandum arcum A D C centro E, per A & C deſcriptum tranſire per punctum D, ita vt abſcindat etiam datam latitudinem B D Lunulæ. Id verò ſic manifeſtum fiet, ducta linea à puncto C ad punctum D, in quo terminatur data latitudo B D, diuidit angulum B C A bifariam per 3. lib. 6. eſt enim vt B C ad C E; ita B D ad D E: cum ex conſtructione, B D ſit potentiâ dupla lineæ D E, ſicut B C dupla eſt potentiâ lineæ C E. Sed ſi ducatur linea ab eodem puncto C ad punctum in quo recta F B ſecatur ab arcu centro F per A deſcripto, idem angu-

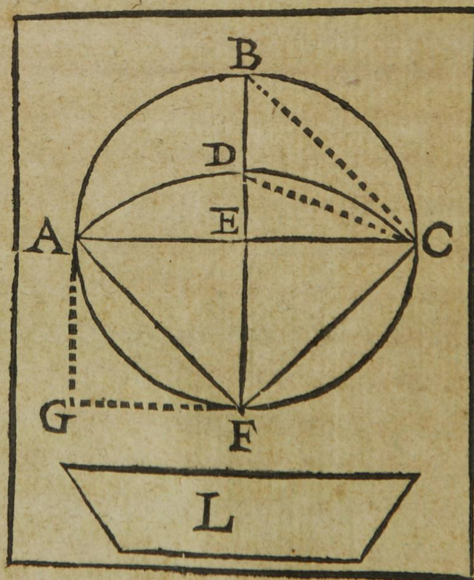
lus

lus BCA bifariam etiam ſecatur; nam angulus ACD arcui A D inſiſtens ad circumferentiam, ſemiſſis eſt anguli AFD eidem arcui A D inſiſtentis ad centrum: qui quidem angulo æqualis eſt angulus ACD. Ergo linea ducta à puncto C, tam ad terminũ datæ latitudinis B D, quam ad communem ſectionem arcûs A C & lineæ F B, vna eademque linea eſt. Ergo deſcripta eſt Lunula Hippocratis: cuius data eſt maxima latitudo B D. Quod erat faciendum.

PROP. VII. PROBL.

Dato exceſſu DE, quo radius arcûs interioris ſuperat radium ſemiperipheriæ exterioris, Lunulam componere.

Figura prima.

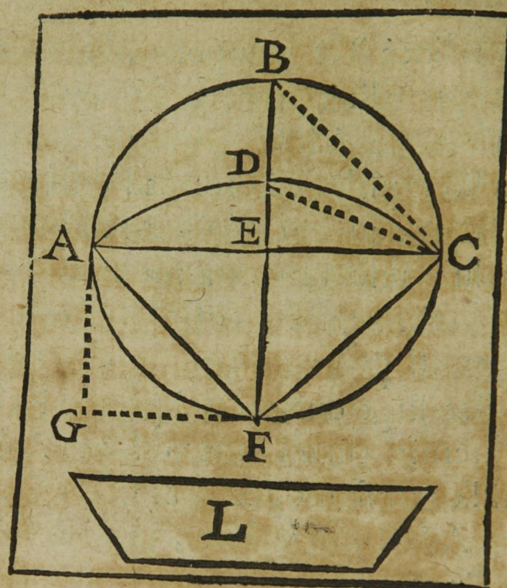


Conſtru

Constructio & Demonstratio.

Reperiatur linea B D, quæ potentiâ sit dupla lineæ datæ E D, eíque adiungatur, vt fiat tota B E radius semicircumferentiæ A B C exterioris. Sumpta verò E F huic radio æquali, centro F ad distantiam F D arcus describatur: qui necessariò transibit per A & C, & semicirculum abscindet, & arcus A D C erit quarta pars peripheriæ centro F descriptæ: nam angulus A F C rectus est propter duos angulos semirectos, quibus constat. Ergo duæ rectæ à puncto F, quod est in circumferentia circuli centro E per A & C descripti, emissæ transeunt per A & C; vt scilicet semicirculum A F C abscindant, in quo sit angulus rectus A F C: & rectus A F C: & æquales sunt inter se, sunt enim bases triangulorum E F A, E F C, æqualia latera circa æquales angulos ad E, nempe rectos habentium: his verò basibus æqualis est linea F D; quod ita probatur. Ducta linea à puncto C ad terminum D dati excessus E D diuidit angulum B C E bifariam per 3. lib. 6. eò quod sit ex constructione B D potentiâ dupla lineæ D E, sicut scilicet est B C potentiâ dupla lineæ C E: sed linea à puncto eodem C ad communem sectionem arcûs centro F per A vel C descripti, & lineæ F B, educta, eundem angulum B C E bifariam etiam diuidit, vt mox patebit. Ergo vna eadémque linea est quæ à puncto C educitur, tam ad terminum D dati excessûs D E, quàm ad sectionem arcûs A C & lineæ F B: hoc est, arcus centro F per

Figura prima.



A deſcriptus tranſit per D. Quod autem proximè aſſumptum eſt lineam ſcilicet à puncto C eductam ad ſectionem arcûs A C cum lineâ F B, diuidere angulum B C E bifariam; ita probatur. Cum angulus contentus à rectâ C A, & rectâ à puncto C educta ad communem ſectionem arcûs A C & rectæ F B, inſiſtat arcui intercepto inter A & rectam F B, qui eſt ſemiſſis quadrantis A C; & ſit ipſe angulus ad circumferentiam: erit ſemiſſis anguli A F B eidem arcui inſiſtentis ad centrum. Eſt autem angulus A F B æqualis angulo A C B. Ergo & angulus A C B duplus eſt anguli quem continet recta C A cum recta à puncto C ad communem ſectionem arcus A C cum recta F B. Quod cum ita ſit: conſtat rectè ſolutũ eſſe Problema.

PROP.

PROP. VIII. PROBL.

Dato cuiuis rectilineo æqualem Lunulam Hippocraticam constituere.

Constructio & Demonstratio.

Datum sit spatium quoduis rectilineum L: cui sit æqualis Lunula reperienda. Reducatur rectilineum L ad quadratum AEFG, vt docent Elementa. Producto verò eius latere A E, in eóque sumpta E C æquali ipsi E A describatur centro E semicirculus A B C. Tum centro F & radio F A describatur arcus A D C. Dico statutam esse Lunulam A B C D A æqualem rectilineo L. *Fig. I.*

Quod enim statuta hæc Lunula eadem sit cum Hippocratica, patet. Clauditur enim exteriore semiperipheria A B C, & arcu interiore A D C: qui est quarta pars peripheriæ centro F descriptæ ob angulum A F C in eius centro rectum: quæ requiruntur per Prop.1. ad huiusmodi Lunulæ constitutionem. Quod autem Lunula hęc rectilineo L sit æqualis, constat. Nam rectilineum L æquale est per constructionẽ. Quadrato A F: cui æquale est triangulum A F C per 41. lib.1. Sed triangulum A F C æquale est Lunulæ ABCD. Ergo eidem Lunulæ rectilineum L est æquale. Dato igitur cuiuis rectilineo, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Ex huius Problematis solutione colligitur, nihil in

Geometria tradi poſſe circa figuras rectilineas quod huic Hippocraticæ Lunulæ non competat, poterit ſcilicet in data ratione Lunula huiuſmodi minui vel augeri. Poterunt non tantùm ſpatia quotlibet rectilinea; ſed etiam aliæ quotlibet, modi eiuſdem Lunulæ in vnicam eis æqualem colligi poterit inter duas oblatas Lunulas ratio exhiberi. Poterunt denique reliqua omnia perfici iuxta doctrinam elementorum: quæ circa Quadratum A F vel triangulum A F C (quorum vtrumque eſt Lunulæ A B C D æquale) abſoluuntur, vt iis tradendis immorandum non ſit: ſed pergendum ad alia quædam ad hanc figuram pertinentia non minori admiratione digna quam ſit prima eius ab Hippocrate conſtitutio obſeruata: ad quæ ſequentibus lemmatis viam ſterno faciliorem.

PROP. IX. DEFINITIO.

Similes circulorum ſectores ſunt quorum anguli ad centrum ſunt æquales.

EXPOSITIO.

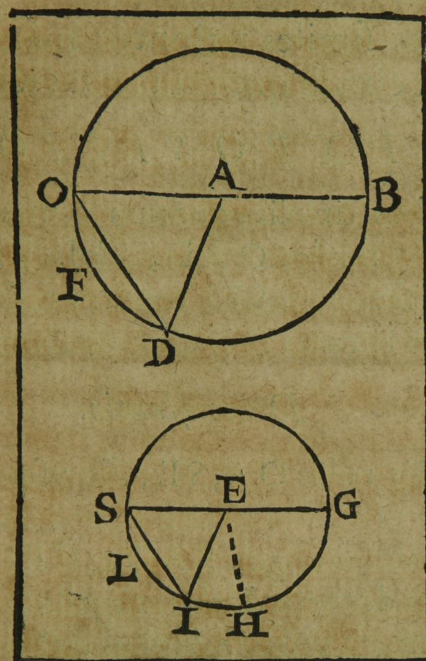
Fig. II. Sint duo quicumque circuli; quorum centra ſint A & E in quibus duo anguli O A D, S E I æquales inter ſe ſtatuantur. Erunt iuxta hanc definitionem ſectores A O D, E S I inter ſe ſimiles.

PROP. X. DEFINITIO.

Similia circulorum ſegmenta ſunt, quæ continentur arcubus ſimilium ſectorum, & rectis arcus illos ſubtendentibus.

EXPO

Figura Secunda.



EXPOSITIO.

Scio aliter ſimilia ſegmenta ab Euclide deſcribi lib. 3. Definit. 10. per proprietatem quam deinde Propoſ. 21. eiuſdem lib. 3. demonſtrat ſegmentis conuenire; ſed hæc mea definitio immediatior mihi viſa eſt, aptior certè & conuenientior tum hactenus traditis tum præſertim deinceps tradendis; ſint ergo ſectores duorum circulorum ſimiles O A D, S E I, id eſt, iuxta præcedentem Prop. 9. ſint anguli O A D, S E I, æquales: arcûs verò O D, S I à ſectorum lateribus interceptos ſubtendant chordæ O D & S I, erunt iuxta hanc definitionem ſegmenta O F D, S L I inter ſe ſimilia. *Fig. II.*

GIS. Nam circuli ſunt inter ſe, vt Quadrata diametrorum vel ſemidiametrorum AO, ES. Sed vt Quadratum ſemidiametri AO ad Quadratum ſemidiametri ES: ita eſt triangulum ADO ad triangulum ſimile EIS. Ergo vt circulus ad circulum; atque adeò per Prop. 11. antecedentem, vt ſector ADO ad ſectorem EIS: ita eſt triangulum ADO ex ſectore ablatum, ad triangulum EIS ex ſectore ſuo ablatum. Ergo & reliquum ſegmentum OFD, ita eſt ad reliquum ſegmentum SLI, vt totus ſector ADO ad totum ſectorem EIS; ſed vt ſector ille ad hunc ſectorem ita eſt circulus totus BDO ad circulum GIS per Prop. 11. Ergo ita eſt ſegmentum OFD ad ſegmentum ſimile SLI, vt circulus prior ad poſteriorem, quod erat probandum.

PROP. XIII. THEOR.

Fig. 11. Si fuerit vt circulus BDO ad alium circulum GIS: ita reciproce angulus HES ſectoris ad angulum DAO ſectoris prioris circuli: erunt duo ſectores DAO, HES æquales.

Demonſtratio.

Fiat angulus SEI æqualis angulo OAD; erit ergo ſector OAD ad ſectorem SEI vt circulus ODB ad circulum SIG per Prop. 11. hoc eſt ex ſupppoſitione, vt angulus SEH ad angulum OAD, vel ipſi æqualem factum SEI. Sed vt angulus SEH ad angulum SEI, ita eſt per 33. lib. 6. ſector SEH ad ſectorem

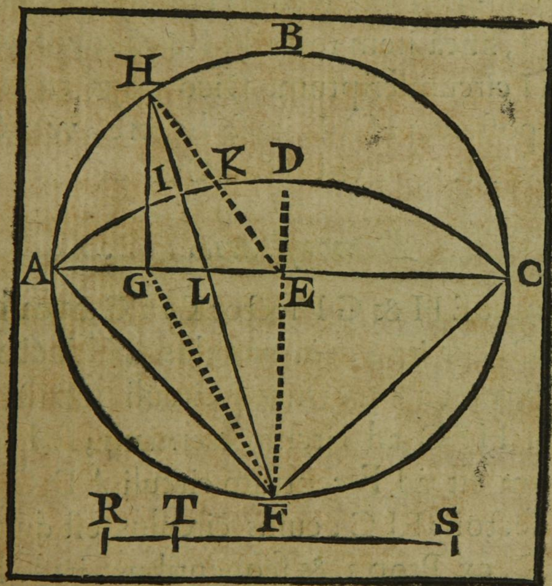
SEI:

S E I : ergo ſector SEH ad ſectorem S E I eandem habet rationem, quam ſector OAD habet ad eundem ſectorem S E I : ergo per 9. lib. 5. æquales ſunt ſectores OAD, & SEH. Quare ſi fuerit vt circulus ad circulum, &c. quod probandum erat.

PROP. XIV. PROBL.

Lunulam Hippocratis iuxta quamuis datam diuidere per rectam lineam.

Figura Tertia.



Conſtructio.

Nulli non Geometræ mirum videbitur hìc propoſitum problema; quo figuræ tam irregularis æquè abſoluta diuiſio promittitur iuxta quamuis rationem: *Fig. 3.*

vt liberior non ſit rectæ lineæ diuidendæ modus; ſed (quod magis mirum) nec difficilior. En vt habet, ſit lunula A B C ita diuidenda vt linea R S diuiſa eſt in T. Ducta A C minoris circuli diameter, ita diuidatur in G, vt linea R S diuiſa eſt in T; tum per G agatur G H perpendicularis ad A C occurrens in H peripheriæ circuli A B C. Denique à centro F arcûs interioris A D C, Lunulæ, ad punctum H deſtinetur recta F H ſecans Lunulam in duas partes: quarum vna eſt triangulum mixtum H C I, arcubus H B C, I D C & rectâ lineâ H I comprehenſum; altera eſt triangulum mixtum H A I, lineâ item rectâ H I & duobus arcubus A H & A I circumſcriptum. Dico prius triangulum H C I ad poſterius H A I, ita ſe habere; vt recta S T ſe habet ad T R: ſiue vt C G ad G A.

Demonſtratio.

Iungantur E H & G F ſector E H C æqualis eſt ſectori F I C, cur ita? quia angulus C H E C ſectoris H E C, cum ſit ad centrum E circuli A B C, duplus eſt anguli H F C ad circumferentiam; ſed angulus H F C cum ſit ad F centrum circuli A D C, ſitque angulus ſectoris F I C; cuius circulus eſt duplus circuli A B C, ex Prop.1. & ſequentibus, ita ſe habebit ad angulum H E C; vt reciproce circulus A B C ſe habet ad circulum A D C; vtrobique enim reperitur ratio ſubdupla: ergo per Prop. 13. antecedentem ſectores H E C, & I F C ſunt æquales. Dematur commune vtrique huic ſectori triangulum mixtum K E C,

remanebit

Figura Tertia.

remanebit ex ſectore H E C, triangulum mixtum H K C; ex ſectore verò I F C reliqua fiet figura polygona conflata ex triangulo L F C & figura quadri latera mixta L I K E. Addatur vtrique, commune triangulum mixtum I H K, fiet triangulum mixtum HCI æquale figuræ polygonæ conflatæ ex duobus triangulis E C F & E H F. Sed triangulum E H F æquale eſt triangulo E G F (eſt enim ſuper eadem baſi E F & in eiſdem parallelis H G, E F) Ergo triangulum mixtum H C I æquale eſt triangulo G F C. Ad hæc cum tota Lunula A B C D, æqualis ſit triangulo A F C, ſi ab vtraque hac quantitate æquales demantur quanti-

tates, nempe ex lunulâ, mixtum triangulum H C I, & ex triangulo A F C, triangulum G F C: æquales remanebunt quantitates: nempe triangulum mixtum H A I, & triangulum A G F. Et ita se habebit triangulum mixtum H C I ad triangulum mixtum H A I, hoc est, pars lunulæ ad reliquam partem, vt triangulum G F C ad triangulum G F A. Sed triangulum G F C ad triangulum G F A ita est, vt linea G C ad lineam G A. Hoc est, ex constructione vt S T ad T R. Ergo vt S T ad T R, ita est pars H C I lunulæ, ad reliquam eius partem H A I. Diuisa est igitur lunula à linea H I iuxta rationem datam. Quare lunulam Hippocratis, &c. diuisimus. Quod faciendum erat.

Aliter.

Fig.3. Hoc etiam alio modo institui potest eiusdem solutionis demonstratio. Sector E H A æqualis est sectori F I A per Prop.13. Illius enim angulus H E A duplus est anguli I F A, sectoris F I A; sicut reciproce circulus A D C duplus est circuli A B C. Dematur ex illis æqualibus sectoribus triangulum mixtum A I L: remanebit ex sectore E H A triangulum mixtum AHI, & triangulum rectilineum E H L: ex sectore verò F I A remanebit triangulum F L A. Sed triangulum E L H est æquale triangulo G L F; cum enim duo triangula F H E F. G E super eadem basi E F, & in eisdem parallelis statuantur; æqualia erunt; demptoque communi triangulo L E F, remanebit triangulum E L H æquale triangulo G L F. Demantur ergo

ex

ex æqualibus illis quantitatibus hæc duo æqualia triangula : remanebit triangulum mixtum A H I æquale triangulo A G F. Atque adeò triangulum mixtum H C I ex Lunula reliquum, æquale erit triangulo G C F. Secta igitur est Lunula à linea H I quemadmodum sectum est triangulum A F C Lunulæ æquale, à lineâ F G. Sed vt triangulum A F G ad triangulum C F G; ita est basis A G ad basim G C, hoc est vt linea R T ad T S ex constructione. Ergo vt iubetur, secta est Lunula A B C per lineam H I.

COROLLARIA.

Ex solutione huius Problematis eiusque demonstratione varia soluuntur Problemata eò iucunda magis, quò facilius perficiuntur; quo etiam ægrius solent figuræ circulares in rectilinea spatia conuerti. Eorum aliquot hic attingenda sunt: quorum cognitio euadit ex dictis planissima vt fusiore tractatione non egeant.

Primum esto. Qualibet ducta linea F H à puncto F, Meniscum A B C D secante in duas partes H I A, H I C; earum ratio nota euadet, si à puncto H ducatur H G perpendicularis ad A C: eadem enim erit ratio lineæ A G ad G C, quæ est trianguli mixti H I A ad mixtum triangulum H I C: hæc enim duo mixta triangula sunt æqualia duobus rectilineis triangulis G F A, G F C: quæ sunt inter se, vt eorum bases G A, G C. Fig. 3.

Secundum. Poterit à quolibet puncto H abscindi Menisci pars ad dextram eius vel sinistram: ad quam Meniscus totus datam habeat rationem: Ducta enim H G perpendiculari ad A C, sumetur ad dextram vel sinistram ipsius

G pars lineæ A C ad quam ipſa A C datam habeat rationem: tum ab aſſumptæ partis termino perpendicularis ad A C erigetur ſectura peripheriam A B C in puncto: à quo, ſicut & à puncto H directæ lineæ ad F, intercipient partem Lunulæ quæſitam, vt ex dictis conſtat.

Tertium. Dato quouis rectilineo, quod triangulo A F C, ſiue Lunula ipſa maius non ſit, æquale ſpatium dari poteſt in Lunula. Reducetur ſcilicet rectilineum illud per Elementa in triangulum eiuſdem altitudinis cum triangulo A F C (quæ
Fig. 3. altitudo eſt F E) eiuſque baſis aſſumetur in quacumque parte linea A C: & ab eius extremis erigentur perpendiculares ad A C. Si enim à punctis in quibus huiuſmodi perpendiculares peripheriam A B C interſecant, ducantur lineæ rectæ: hæ intercipient Lunulæ ſpatium ſpatio rectilineo dato æquale.

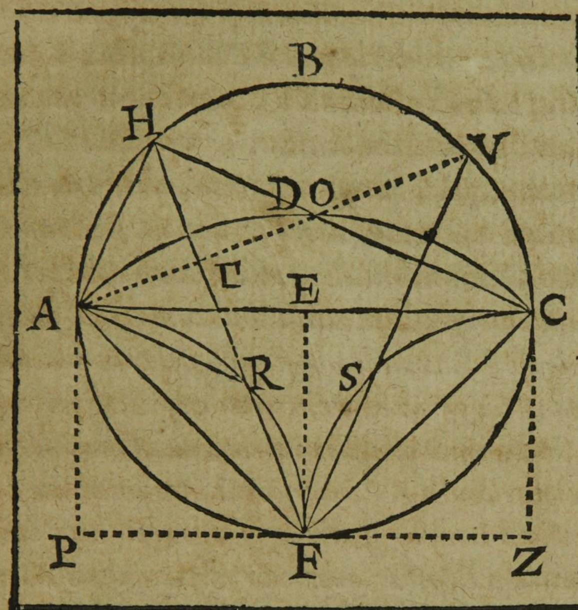
Quartum. Conſtat quomodo parti cuiuſvis Meniſci inter duas rectas à puncto F emiſſas interceptæ exhiberi poßit alia pars æqualis in quouis ipſius Meniſci loco; quò referri debet ipſius Lunulæ in quotuis partes æquales diuiſio; imò & in quācunque etiam rationem ſiue rationalem, ſiue irrationalem, ſiue maioris, ſiue minoris inæqualitatis. Secundum mediam & externam, &c. Quæ & alia innumera non minus iucunda, ex dictis leui operâ perfici à quouis Geometra poterunt.

PROP. XV. PROBL.

Conſtitui poteſt triangulum curuilineum æquale, & iſoperimetrum Hippocratico meniſco.

Conſtru

Figura Quarta.



Constructio.

Repetatur figura Propositionis antecedentis. In- *Fig. 4.*
qua exhibita est Lunula Hippocratis A B C D: & super duobus radiis E A, E C duo Quadrata construantur E P, E Z. Tum punitus P & Z tanquam centris duo arcus per A & C describantur A F, & C F: qui necessariò transibunt per F ambo ob æquales in Quadratis lineas P A, P F; & Z C, Z F; & in eodem puncto F sese mutuo tangent, vterque enim lineam F E ad radios F P, F Z perpendicularem tangit per 16. lib. 3. Dico triangulum curuilineum F A C arcubus F A, F C & A D C circumscriptum, esse æquale Lunulæ ABCD, ipsique isoperimetrum.

Demonstratio.

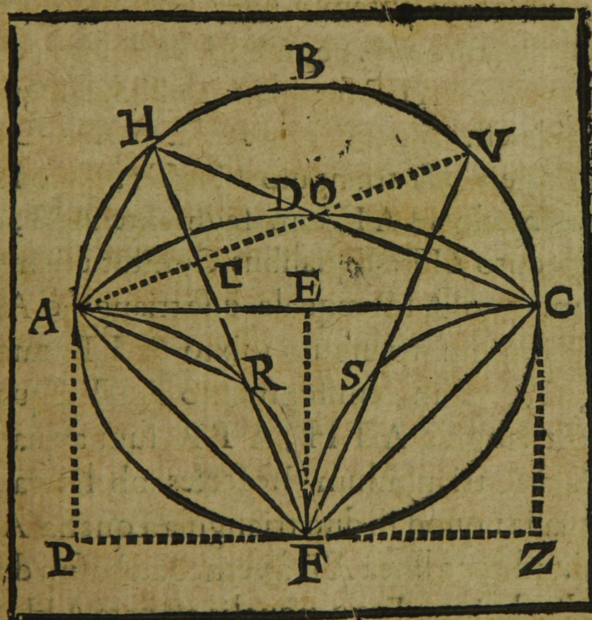
Arcus A F centro P descriptus quarta pars est peripheriæ sui circuli ob angulum rectum APF in eius centro eademque est ratio arcûs C F. Duo ergo arcus A F, C F æquales sunt semiperipheriæ A B C. Communis autem Lunulæ & huic triangulo est arcus A D C. Patet ergo triangulum hoc Lunulæ isoperimetrum esse. Probandum superest idem triangulum Lunulæ esse æquale. Segmentum A D C, cui insistit ad centrum angulus rectus, simile est vtrique segmento A R F, C S F per Prop. 1. & per Prop. 12. ita se habet ad alterutrum horum segmentorum; vt totus eius circulus ad totum circulum eorumdem. Cum ergo circulus A D C duplus sit ex constructione ad circulum A R F
Fig. 4. siue C S F: erit segmentum A D C duplum segmenti A R F: atque adeo æquale segmentis duobus simul A R F, C S F. Addatur vtrique triangulum mixtum linea A C & arcubus A R F, C S F comprehensum: fiet triangulum rectilineum A F C æquale triangulo curuilineo arcubus A D C, A R F, C S F contento. Sed eidem triangulo æqualis ostensa est superius Lunula A B C D. Ergo eidem Lunulæ æquale etiam est triangulum hoc curuilineum. Construi ergo potest triangulum curuilineum Lunulæ Hippocraticæ isoperimetrum & æquale, illúdque de facto construximus. Quod fieri debebat.

PROP.

PROP. XVI. THEOR.

Eadem repetitâ figurâ: Linea quælibet FH à puncto F ad exteriorem Lunulæ ambitum educta abſcindit partes æquales ab eadem, & à triangulo curuilineo : FAC. Cuiuſmodi ſunt HAI, & triangulum mixtum AIR. Item HCI, & quadrilaterum mixtum rectâ IR, & arcubus IC, CSF, FR contentum. Fig. 4.

Figura Quarta.



Demonſtratio.

Ductis lineis AH, AR & AT perpendiculari ad FH. Duo ſegmenta AH, AR æqualia ſunt. Duæ

enim lineæ F A, F H à puncto F in circumferentia duorum circulorum æqualium F R A, F A H posito eductæ angulum continent æqualibus arcubus insistentem: quos rectæ A H, A R subtendunt, atque adeo segmenta æqualia abscindunt. Eisdem verò segmentis æquale est semisegmentum A I T. Est enim arcus A I similis dimidio arcui A H vel A R, eò quod punctum F, vnde lineæ F A, F H exeunt, sit in centro circuli A I C; in peripheria verò arcuum A H & A R. Producta igitur A T donec occurrat arcui A D C, segmentum abscinderet simile segmento A H vel A R. Segmentum autem à linea A T abscissum duplum foret per Prop. 12. Segmenti A H vel A R. Ergo semisegmentum A I T segmento A H aut segmento A R æquale est. His positis constat partem Lunulæ H A I æqualem esse triangulo H A T: addito scilicet mixto triangulo H A I, tam segmento A H, quam semisegmento AIT. Æqualibus. Constat etiam triangulum mixtum A I R æquale esse triangulo A T R: addito nimirum triangulo mixto A T R tam segmento A R, quàm semisegmento A I T æqualibus. Sed duo triangula A T H, A T R sunt æqualia. Est enim A H R triangulum Isosceles ob latera A H, A R æqualia: quod in duo triangula æqualia A T H, A T R diuiditur à lineâ A T à vertice ad basim deductâ perpendiculariter. Ergo æqualis est pars A H I lunulæ, ostensa æqualis triangulo A T H, triangulo mixto A T R ostenso æquali, triangulo A T R. Abscindit igitur linea quælibet F H à centro F circuli A D C, deducta

Fig. 4.

deducta ad peripheriam ABC, ex Lunula ABCD & ex triangulo curuilineo FAC. Spatia duo cornui A adhærentia, æqualia. Vnde necessariò sequitur reliqua duo spatia versus C ab eadem linea FH abscissa, æqualia etiam fore. Si enim à Lunula & triangulo curuilineo æqualibus per Prop. 15. Demantur partes proximè ostensæ æquales: reliquas æquales esse necesse est. Quare. Linea quælibet FH, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

Ex præcedentibus colligitur totum triangulum curuilineum semiperipheriâ ABC & arcubus duobus FRA, FSC comprehensum (quod quidem toti circulo ABCF isoperimetrum est) diuidi posse iuxta quamuis datam rationem. Si enim vel Lunula ABCDA, vel triangulum curuilineum FRADBSF in data ratione diuidatur vt traditum est in superioribus, per lineam FH verbigratiâ. Eadem linea totum illud triangulum in eadem ratione diuidet, vt ex dictis constat.

PROP. XVII. THEOR.

In eadem figura si linea AT producatur donec circulo ABC occurrat in V: ad quod ex F linea educatur. Dico triangulum TFV æquale esse parti HCI Lunulæ, quam FH linea abscindit ad partes C. Vel etiam parti trianguli curuilinei FAC ad easdem partes C abscissæ. *Fig. 4.*

Demonſtratio.

*Fig.*4. Iungatur recta C H. Angulus A V F eſt ſemirectus; ſemiſſis ſcilicet anguli recti A E F ad centrum E eidem arcui A F inſiſtentis. Ergo in triangulo T V F, alter eius angulus T F V ſemirectus etiam erit: atque adeò triangulum hoc ſimile eſt tam triangulo A T H quam triangulo A F C. Ad hæc. Baſis F V æqualis eſt lineæ C H. Nam cum angulus ſemirectus H F V inſiſtat arcui H V: erit arcus hic quarta pars peripheriæ totius circuli: qualis eſt etiam arcus C F. Si igitur arcubus æqualibus H B V, F C addatur arcus C V: erunt duo arcus H V C, F C V æquales. Ergo & lineæ F V, C H arcus illos ſubtendentes, æquales erunt. Quod cum ita ſit: ſitque angulus A H C rectus: erit triangulum A F C ſuper baſi A C trianguli A H C æquale triangulo A T H ſimili ſuper latere A H: & ſimul triangulo ſimili, quod ſuper latere H C erigeretur. Hoc eſt triangulo V T F: quod & ſimile oſtenſum eſt triangulo H T A; & eius baſis V F probata æqualis lineæ H C. Cum igitur Lunula A B C D æqualis ſit triangulo A F C; æqualis etiam erit duobus triangulis H T A, *Fig.*4. V T F. Sed triangulum H T A æquale eſt Lunulæ parti H A I à linea F H abſciſſæ. Ergo altera eiuſdem Lunulæ pars H C I ab eadem F H abſciſſa, æqualis erit triangulo V T F. Quod etiam neceſſe eſt æquale eſſe parti abſciſſæ verſus C trianguli curuilinei F A C; quæ arcubus I C, C S F, F R, & recta R I comprehenditur. Cum enim triangulum hoc curuilineum æquale ſit

ſit perinde vt Lunula, duobus triangulis HTA,VTF. Sit autem triangulum mixtum æquale oſtenſum triangulo HTA: erit reliqua pars curuilinei illius trianguli, æqualis triangulo VTF. Quare. Si linea AT producatur, &c. Quod erat probandum.

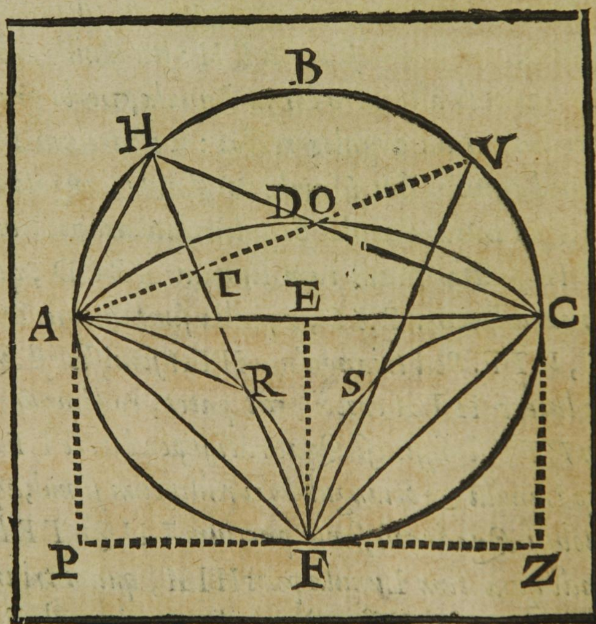
COROLLARIVM.

Ex dictis colligitur, eductam lineam quamlibet à puncto F, & tam Lunulam quam triangulum curuilineum ACF ſecantem, cuiuſmodi eſt recta FH: ita diuidi in puncto T à linea, quæ ab alterutro cornu Lunulæ, verbi gratia, A, ad ipſam ducitur ad angulos rectos: vt partium Quadrata & ſimul æqualia ſint Lunulæ & ſimul triangulo curuilineo. Et Quadrata ſingula ſingulis duabus partibus à linea ipſa FH factis. Nam tam Lunula ABCD, quam triangulum curuilineum FAC, æqualia ſunt duobus triangulis HTA, VTF. Sed triangulum HTA ſemiſſis eſt Quadrati ſuper latere HTA erecti, vt patet, eodémque iure triangulum VTF ſemiſſis eſt Quadrati ſuper latere TF constructi. Ergo Lunula & triangulum curuilineum ſimul, æqualia ſunt duobus Quadratis ſimul partium TH & TF lineæ FH. Deinde quia tam Lunulæ pars HIA, quàm triangulum mixtum AIR abſciſſum à curuilineo triangulo FAC, æqualia ſunt ſeparatim ſumpta triangulo HTA: euidens eſt, ſi ſimul ſumantur, qualia eſſe Quadrato lateris TH: eodémque modo pars altera verſus C abſciſſa æqualis erit Quadrato lateris TF.

PROP. XVIII. THEOR.

In eadem figura. Si à duobus Lunulæ cornibus A & C ad idem punctum H peripheriæ exterioris, lineæ iungantur : erunt lineæ inter duas Lunulæ peripherias, nempe H A, H O, interceptæ ſemper æquales.

Figura Quarta.



Demonſtratio.

Fig.4. Propoſitionis veritas conſtabit euidenter : ſi prius oſtendero lineas C H, & AT, ſi producatur, ſeſe mutuo ſecare in puncto O : quod ſit in arcu A D B. Hoc autem ſic probo. Cum linea F H Applicatam A O ſecet ad angulos rectos in puncto T, eandem in eodem

puncto

puncto T bifariam secabit; erit igitur T O æqualis lineæ T H; cui superiùs T A æqualis ostensa est. Ac proinde ducta H O cum lineâ H T, angulum semirectum continebit fiet enim triangulum H T O æquale & simile triangulo H T A: cuius anguli H & A sunt semirecti. Sed linea H C cum lineâ eadem H T F angulum etiam semirectum C H F continet: eò quod angulus C H F semissis sit anguli recti C E F ad centrum eidem arcui F C insistentis. Ergo lineæ H O & H C eadem sunt linea: atque adeo A O & H C in eodem puncto O arcûs A D C se intersecant. Ac proinde angulus H O T, quem linea H O C cum linea O A continet, est semirectus, hoc est, æqualis semirecto H A O. Ergo duo latera H A, H O æqualia sunt. Quod cum eodem modo demonstrari possit, quæcunque tandem linea F H ducatur: patet verum semper fore. Quod, si à duobus Lunulæ cornibus A & C, &c. Quod erat probandum.

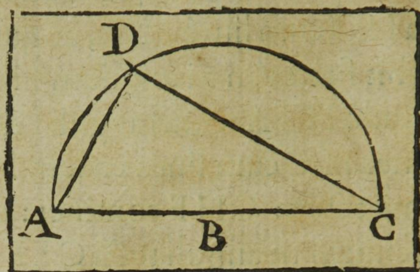
PROP. XIX. PROBL.

Datâ lineâ aliam definire, quæ triplum eius possit.

Alterius cuiusdam Lunulæ constructionem hic instituo: quæ non minus quam præcedens iucunda videatur; magis etiam aliquantò subtilior & exquisitior. Ad huius autem delineationem quædam tum Theoremata, tum Problemata necessaria sunt: quorum hoc primum esto.

Constructio.

Figura Quinta.



Constructio.

Fig. 5. Data sit linea A B. Producatur ita vt B C æqualis fiat ipsi A B. Tum centro B per A semicirculus describatur: cui applicetur A D æqualis ipsi A B. Denique iungatur CD. Dico CD triplum posse lineæ datæ AB.

Demonstratio.

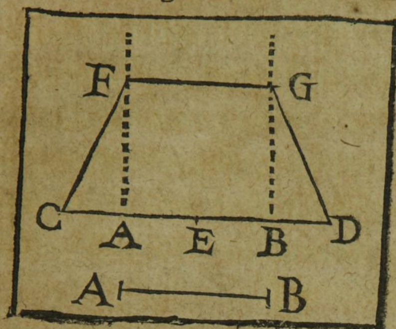
Quadratum lineæ A C quadruplum est Quadrati A B siue A D. Sed Quadratum A C est æquale Quadratis A D, D C. Ergo duo Quadrata A D, D C quadrupla sunt Quadrati A D. Ergo Quadratum D C triplum est Quadrati A D. Quare inuenta est linea D C quæ triplum possit lineæ datæ A B. Quod faciendum erat.

PROP. XX. PROBL.

Datis duabus lineis: quarum maior possit triplum minoris; trapezium construere: cuius tria latera minori æqualia sint; & angulum ad maiorem constituant æqualem.

Constru

Figura Sexta.



Constructio.

Datarum linearum maior ſit C D, quæ biſariam in E diuidatur: diuiſa etiam biſariam minore A B, pars eius altera ſit E A, altera E B. Deinde à punctis A & B rectæ erigantur A F, B G indefinitæ longitudinis, & ad C D perpendiculares. Tum centris C & D ad diſtantiam datæ minoris lineæ A B arcus deſcribantur lineas A F, B G ſecantes in F & G denique iungantur C F, F G, G D. Dico Trapezium C F G D quæſtioni ſatisfacere. *Fig. 6.*

Demonſtratio.

Duo triangula F A C, G B D habent duo latera C F, C A duobus D G, D B ex conſtructione æqualia & angulos A & B æquales nempe rectos. Et reliquos F & G minores recto. Ergo per 7. lib. 6. Sunt æquiangula: ac proinde per 4. lib. 6. vt C A ad A F ita eſt D B ad B G. Sed C A, D B ſunt æquales. Ergo æquales etiam ſunt A F, B G. Quæ cum ſint parallelæ: erunt etiam duæ F G, A B parallelæ & æquales. Tres ergo lineæ C F, F G, G D ſunt æquales datæ minori

E lineæ

lineæ AB: & duo anguli FCA, GDB ostensi sunt æquales. Ergo Trapezium iuxta petitas conditiones constructum est. Quod erat præstandum.

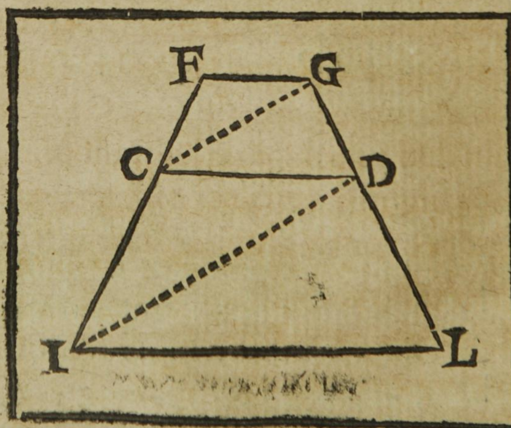
COROLLARIVM.

Colligitur ex Problematis solutione latus F G maiori datæ lineæ CD oppositum semper fore in id generis Trapezijs parallelum eidem maiori datæ lineæ CD. Id enim inter demonstrandum collectum est.

PROP. XXI. THEOR.

Si Trapezij Prop. antecedente constructi latera vltra basim CD producantur: & in eis abscindantur lineæ CI, DL æquales ipsi basi CD: ac tandem iungantur IL, rectâ lineâ. Dico Trapezium CDLI esse priori FGDC simile.

Figura Septima.



Demonstratio.

Fig. 7. Ducantur vtriusque Trapezij diametri GC, DI. Constat ergo in primis angulos ICD, CFG æquales esse,

esse, sicut & L D C, D G F propter parallelas F G, C D, in quibus illi interni, hi externi sunt. Constat etiam latera F G, F C & C D, C I: item F G, G D; & C D, D L æquales illos angulos continentia esse proportionalia, in ratione nimirum æqualitatis. Deinde cum duo triangula F G C, C D I habeant duo latera angulos F & C æquales continentia, proportionalia: erunt æquiangula: anguli scilicet F G C, & C D I æquales erunt. Quibus demptis ex æqualibus F D G, C D L: æquales remanebunt C G D, I D L. Quia igitur in triangulis C G D, I D L anguli G & D sunt æquales; & circa illos latera G D, G C; & D L, D I proportionalia proportionalia enim erant F G (cui æqualis est G D) G C; & C D (cui æquale est D L) D I, in triangulis F G C, C D I. Ergo hæc triangula G D C, D L I æquiangula sunt: ita vt angulus G D C sit æqualis angulo D L I. Ergo D C & L I sunt lineæ parallelæ: & præterea latera G D, D C & D L, L I sunt proportionalia: atque adeò F C, C D; & C I, I L. Quare cum duo hæc trapezia habeant & angulos omnes singulos singulis æquales; & latera circa æquales angulos proportionala: similia sunt inter se. Quod erat probandum.

PROP. XXII. THEOR.

Iisdem positis. Trapezium C L ad Trapezium F D triplam habet rationem.

Demonstratio.

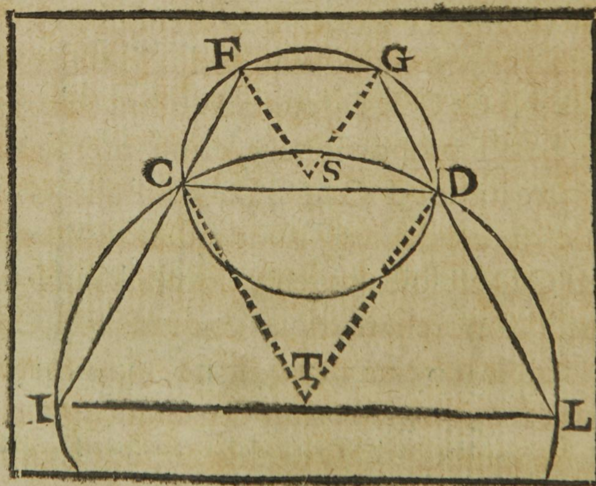
Latus C D Trapezij C G, potest triplum lateris F G *Fig. 7.*

ex constructione. Ergo etiam latus I L Trapezij I D triplum potest lateris C D. Eadem enim proportio laterum homologorum in similibus figuris. Sed vt Quadratum super I L ad Quadratum super C D: ita est Trapezium I D super I L, ad Trapezium C G simile super C D similiterque constitutum. Ergo sicut Quadratum I L triplum est Quadrati CD: ita Trapezium I D triplũ erit Trapezij CG. Quod erat demõstrãdum.

PROP. XXIII. THEOR.

Iisdem positis. Circa vtrumque Trapezium circulus describi potest: & circulus circa maius descriptus, circuli circa minus descripti triplus est.

Figura Octaua.



Demonstratio.

Fig. 8. Quod possit circulus circa hæc Trapezia describi, qui

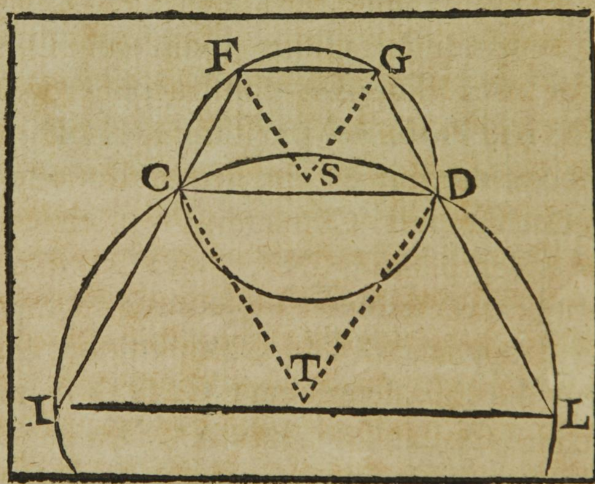
qui ſcilicet per omnes eorum angulos tranſeat, euidens eſt, ex eo quod duæ lineæ F G, C D ſint parallelæ: in quas incidens recta F C duos angulos internos F C D, C F G duobus rectis æquales facit. Sed angulus F C D æqualis eſt angulo G D C ex primâ huiuſmodi Trapezij conſtitutione. Ergo duo anguli C F G. C D G in hoc Quadrilatero oppoſiti ſunt duobus rectis æquales. Ac proinde circa illud circulus deſcribi poteſt. Eadem eſt ratio alterius Trapezij C L.

Deſcribantur ergo huiuſmodi circuli; & centrum quidem minoris Trapezij ſit S, maioris autem T. Vnde ducantur radij S F, S G: & T C, T D. Quia igitur anguli D C F, L I C ſunt æquales ad circumferentiam, inſiſtent ſimilibus arcubus F G D, C D L. Ergo eorum arcuum ſemiſſes F G, & C D ſimiles etiam erunt. Vnde fit vt anguli F S G, C T D arcubus F G, C D inſiſtentes ad centrum ſint æquales. Quod cum ita ſit triangula F S G, C T D habentia latera circa æquales angulos S & T proportionalia, erunt inter ſe æquiangula. Quare ita erit T C ad C D; vt S F ad F G. Et permutando, ita erit radius T C ad radium S F, vt C D ad F G. Sed C D eſt linea poteſtate tripla lineæ F G. Ergo & radius T C poteſtate triplus erit radij S F. Cum verò circuli ita ſe habeant per 2. lib. 12. vt diametrorum, aut etiam ſemidiametrorum Quadrata: erit circulus I C D L, circuli C F G D triplus. Ergo. Circa vtrumque Trapezium, &c. Quod erat probandum. Fig. 8.

PROP. XXIV. THEOR.

In eadem figura. Totum ſegmentum ICDL maioris circuli, totius ſegmenti CFGD circuli minoris triplum erit: & ſingula ſegmenta ab Applicatis tribus I C, C D, D L abſciſſa tripla erunt ſingulorum trium ſegmentorum ab Applicatis C F, F G, G D abſciſſorum.

Figura Octaua.



Demonſtratio.

Fig. 8. Cum ſegmenta ſimilia diuerſorum circulorum eandem habeant rationem inter ſe quam ipſi circuli per Prop. 12. conſtet verò dicta ſegmenta eſſe ſimilia ex ante dictis: conſtat perinde ſingula ſegmenta I C, C D, D L tripla eſſe ſingulorum ſegmentorum C F F G, G D. Siquidem circulus I C D L, circuli C F G D oſtenſus

ostensus est Prop. antecedente triplus. Quare totum segmentum, &c. Quod erat probandum.

PROP. XXV. THEOR.

In eadem figura. Lunula, quam externa peripheria C F G D, & interna C D comprehendunt; æquales est Trapezio F G D C.

Demonstratio.

Huc spectarunt fere omnia, quæ à Proposit.19. ad hanc vsque demonstrata sunt. Aliam enim Lunulam ab Hippocratica diuersam construere propositum erat: quod hac Prop. vel præstatur: vel saltem præstandi modus aperitur ex eius demonstratione: quæ ex dictis clarissima est. Cum enim Prop. antecedente ostensum sit segmentum C D, à linea C D in circulo maiore applicata abscissum, triplum esse segmenti similis F G ab applicata F G in circulo minore abscissi: sint autem duo alia segmenta F C, G D segmento F G æqualia: constat segmentum C D æquale esse tribus illis segmentis simul sumptis. Addatur ergo mixtum spatium commune, quod lineis rectis C F, F G, G D & arcu C D circumscribitur: fiet Trapezium F D æquale Lunulæ C F G D C. Patet ergo Propositum. *Fig.8.*

SCHOLIVM.

Huc singulare Problema afferendum non est quo Meniscus huiusmodi statuatur: cum ex dictis, eius componendi modus apertissimus sit. Præsertim cum datur linea minor, ad

ad quam maior potentiâ sit tripla. Id enim Prop. 19. traditum est. Quod si daretur linea, quæ ad alteram potentiâ esse deberet tripla: quamquam ex Elementis id facilè perfici possit: hunc tamen modum hic obiter accipe.

Figura Nona.

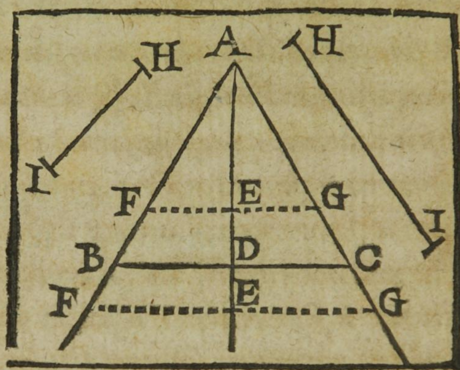


Fig. 9. Data sit linea H I. In quocumque triangulo æquilatero A B C, ducatur perpendicularis A D ab angulo A ad latus B C: & in ea sumatur A E æqualis datæ lineæ H I: & per E ducatur F G parallela lateri B C. Erit E F, vel E G ea, quæ inuestigatur. Est enim triangulum A F G æquilaterum: in quo ducitur A E perpendicularis ad latus F G. Ergo A E hoc est, H I est potentiâ tripla lineæ E F, vel F G. Linea enim A F potest lineas A E & E F. Sed eadem A F, cum sit æqualis lineæ F G, potest Quadruplum lineæ E F, quæ est illius semissis. Ergo A E potest eiusdem E F triplum. Quod si neutra linearum, quæ Trapezium componere debent futurum æquale Lunulæ, daretur: sumere tunc licebit cuiuscunque trianguli æquilateri perpendicularem ab aliquo eius angulo ad latus oppositum ductam & semissem lateris trianguli.

Illa

Illa enim perpendicularis triplum poteſt ſemiſſis lateris triangulum conſtituentis.

Obſeruare præterea licet, tum in huius nouæ Lunulæ conſtitutione: tum in Lunula Hippocratica: eandem eſſe proportionem potentiæ diametri ſiue ſemidiametri aut etiam Applicatæ ſegmentum abſcindentis circuli maioris ſiuè interni; ad diametrum ſiue ſemidiametrum aut Applicatam ſegmentum circuli minoris ſiue externi ſimile ſegmento abſciſſo maioris circuli abſcindentem: quæ eſt reciprocè numeri ſegmentorum circuli minoris ſegmento maioris æqualium. Ita vides in figura huius Propoſitionis lineam C D abſcindentem ſegmentum C D maioris circuli ſiuè interni, poſſe triplum lineæ C F abſcindentis ſegmentum C F ſimile ſegmento C D. Fig. 9. *Sed viciſſim tria requiruntur ſegmenta in minori circulo ſimilia ſegmento C D maioris; quæ ſimul ipſi ſegmento C D ſint æqualia. Similiter in Lunula Hippocratis Prop.2 delineata radius F A maioris circuli ſiue interni duplum poteſt radij E A minoris ſiue externi circuli A B C. Vel recta A C ſegmentum A D C maioris circuli abſcindens, duplum poteſt rectæ A F (cui æqualis foret, ſi duceretur; recta A B) ſegmentum ſimile minoris circuli, abſcindentis. Sed viciſſim numerus ſegmentorum minoris circuli, duplus eſt ad ſegmentum maioris, vt illa ſimul huic ſint æqualia. Quod ſi daretur ars Geometrica, qua aliæ eius generis Lunulæ definiri poſſent ſpatijs rectilineis æquales: idem ſemper obſeruaretur vt etiam annotauit R.P. Lalouera lib.1. Prop.25.operis ſubtiliſſimi tetragoniſmicorum Elementorum. Vt ſi, quemadmodum nos Trapezium ſiue quadrilaterum tribus lateribus æqualibus conſtans conſtruximus Lunulæ æquale ars nota*

F foret

foret, quâ pentagonum quatuor lateribus æqualibus & quinto maiore comprehenderetur: deberet quintum illud latus esse potentiâ quadruplum singulorum quatuor laterum æqualium: vt scilicet quintum illud latus segmentum ex circulo maiore siue interno abscinderet quadruplum segmenti similis à singulis quatuor lateribus æqualibus ex minore circulo siue externo abscissi. Idem in hexagono & reliquis deinceps polygonis contingeret. Sed horum polygonorum constituendorum ratio Geometrica nondum innotuit, nec nisi summa cum difficultate nosci posse censeo cum ex varia angulorum constitutione pendeat, quam summè difficilem experiuntur Geometræ. Quod si per numeros agendum sit: poterit alijs & alijs adhibitis ad veros vel veris proximos, tentando tandem deueniri, quorum ope Lunula construatur rectilineo polygono æqualis. Exemplum vnicum plurium instar hic, in medium afferam: In quo Lunulam exhibebo æqualem rectilineo pentagono: cuius quatuor latera sint æqualia; quintum verò esse debet singulorum quadruplum potentiâ, siue duplum longitudine: vt scilicet potentia ma-
Fig.8. *ioris lateris quadrupla sit potettiæ singulorum minorum larum: sicut vicißim numerus minorum laterum quadruplus est numero, (qui vnitas est) maioris lateris; vt paulo ante annotaui. Iuuat demum Problema illud in seriem propositionum reponere. Sit ergo.*

PROP. XXVI. PROBL.

Meniscum rectilineo pentagono æqualem ope numerorum delineare.

Constru

Figura Decima.

Constructio.

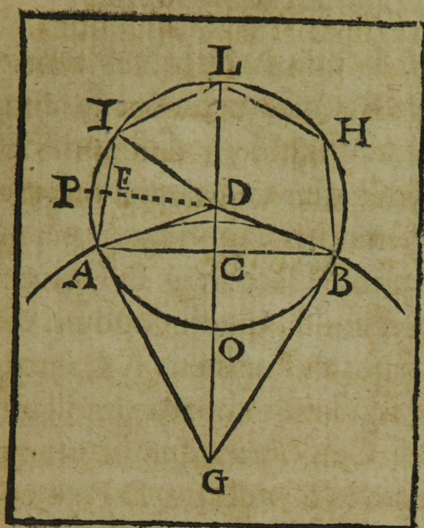
Sit circulus, cuius centrum D, diameter L O radius D O. Fiat angulus A D O $68^{\circ}\ 49'\ 55''\ 20'''$ & à puncto A ducatur A C B ad radium D O perpendicularis in C. Deinde ſuper A B fiat triangulum Iſoſceles A G B: cuius duo latera æqualia ſint diametro L O circuli. Tum centro G per A & B circulus deſcribatur: cuius arcus A B eſt interna peripheria Lunulæ, quam cum arcu A B conſtituit externa peripheria A L B denique diuiſis arcubus L A, L B bifariam, illo in, L iſto in H, Applicentur rectæ A I, I L, L H, H B. Dico pentagonum hoc rectilineum Lunulæ eſſe æquale. *Fig.10.*

Demonſtratio.

Certum eſt in primis circulum centro G deſcriptum per A & B Quadruplum eſſe circuli minoris centro D per A & B itidem deſcripti. Eſt enim per conſtructionem radius G A circuli maioris duplus radij D A circuli minoris. Quod igitur per numeros noſci debet, eſt primò, ſectorem D I A ſimilem eſſe ſectori G A B. Secundò, inueſtigandum eſt an chordæ A I, I L, &c. æquales ſint lineæ A C: atque adeo, an A B dupla ſit ſigillatim chordarum illarum, ſicut & dupla eſt rectæ C A. Vtrumque ſic innoteſcet diuiſo arcu A I bifariam in P, ducatur D P: quæ & bifariam & ad angulos rectos chordam A I ſecabit: erítque R A ſinus arcûs P A, ſiue anguli P D A. Iam quoniam arcus A O poſitus eſt $68^{\circ}\ 49'\ 55''\ 20'''$; erit arcus A I L $111^{\circ}\ 10'\ 4''\ 40'''$ qui habetur dempto A O ex ſemicirculo L A O 180°. Arcus ergo A P, qui ſemiſſis eſt arcûs A I, erit $27^{\circ}, 47', 31'', 10'''$ cuius ſinûs eſt A R partium 466 2629. Sed huius ſinûs dupla eſt recta A C, ſiue ſinus arcûs A O $68^{\circ}\ 49'\ 55''\ 20'''$. Hæc enim
Fig. 10. partium eſt 9325 259. Ergo lineæ A C, æqualis eſt chorda A I, atque adeò chordæ reliquæ I L, L H, H B: quarum ſingularum dupla erit recta A B, & earumdem, poteſtate erit ipſamet quadrupla. Habemus igitur rectilineum pentagonum A I L H B A, cuius maius latus A B eſt potentiâ quadruplus ſingulorum minorum laterum. Quod verò ſector G A B ſimilis ſit ſectori D A I, & reliquis tribus inſequentibus, ſic oſten-

ditur

Figura Decima.



ditur. Triangula D R A, G C A habent angulos R & C. Æquales, nempe rectos; & duo latera A R, A D & A C, A G proportionalia: duplum ſiquidem eſt latus A G lateris A D; & latus A C lateris A R: cum A G poſita ſit æqualis diametro L O; & A I (cuius A R eſt ſemiſſis) æqualis ſit oſtenſa rectæ A C. Reliquorum verò angulorum vterque A D R, A G C recto minor eſt. Ergo duo illa triangula A D R, A G C ſunt æquiangula. Ergo & eorum dupla A D I, A G B æquiangula erunt. Sectores ergo D I A & G A B ſimiles ſunt: Quare & ſegmenta lineis A B, A I, I L,&c. abſciſſa ſimilia erunt. Et ita ſe habebit ſegmentum A B ad ſegmentum A I; vt circulus maior ad minorem. Sed ille eſt huius quadruplus. Ergo & ſegmentum A B, erit ſegmenti A I quadruplum atque adeò *Fig.10.*

æquale quatuor illis ſegmentis A I, I L, &c. Addatur vtrique huic quantitati æquale ſpatium mixtum, arcu A B & rectis A I, I L, L H, H B comprehenſum: fiet Lunula A L B æqualis rectilineo pentagono A I L H B. Rectè igitur per numeros delineatum eſt rectilineum pentagonum Meniſco æquale. Quod erat faciendum.

MONITVM.

Poſſent eius generis plures Lunulæ rectilineis ſpatijs & ex parte regularibus æquales tentando inueſtigari per numeros: cum id Geometrica ratio nulla hactenus præſtare potuerit. Sed viam ad illud aſſequendum præcedente exemplo, cui reliqua omnia per ſimilia non poſſunt non eſſe, aperuiſſe ſufficiat. Subiungam impoſterum alias aliquot compoſitiones figurarum quæ ambitu clauduntur magis irregulari; quæque curuis conſtant, vel partim curuis, partim rectis lineis: nullas tamen adducam; in quibus aliquid ſingulare, vel ratione materiæ, vel demonſtrationis, obſeruare non liceat. Hinc ordior.

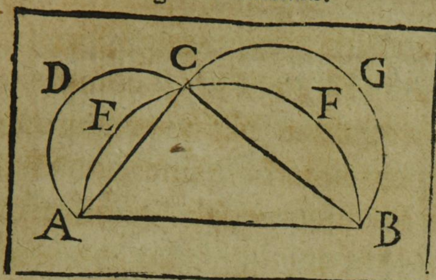
PROP. XXVII. PROBL.

Triangulo cuicunque rectangulo duos ſimul Meniſcos æquales conſtituere.

Conſtructio.

Fig. 11. Sit triangulum A C B: cuius angulus C rectus ponatur. Super baſi A B, ſemicirculus A C B deſcribatur: qui neceſſariò per angulum rectum C abiturus eſt. Deſcribantur etiam ſuper latera C A, C B ſemicirculi

Figura Vndecima.



circuli C D A, C G B: horum peripheriæ vnâ cum arcubus prioris circuli ſuper baſim deſcripti duos Meniſcos efformabunt C D A E C, C G B F C: quos ſimul ſumptos, æquales eſſe dico triangulo rectangulo A C B.

Demonſtratio.

In triangulo rectangulo A C B, Quadratum ſuper baſi A B, æquale eſt Quadratis ſuper lateribus C A, C B. Sed circuli & ſemicirculi ita ſe habent, vt diametrorum Quadrata. Ergo ſemicirculus A C B duobus ſemicirculis C D A, C G B eſt æqualis. Demptis ergo ſegmentis communibus C E A, C F B remanet triangulum A C B æquale duobus Meniſcis C D A E, C G B F. Quare triangulo rectangulo duos Meniſcos æquales conſtituimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Si triangulum rectangulum A B C foret Iſoſceles: duæ Lunulæ, æquales inter ſe forent, nec ab Hippocratica diſcreparent, ſinguliſque ſpatium æquale rectilineum in triangulo ACB aſſignari poſſet. Quandiu verò huiuſmodi triangulum

ABC

ACB scalenum proponetur: non leuiori opera singulis Lunulis spatium æquale abscindi potest ex triangulo, quam circulus in Quadratum conuerti.

Constat porrò omne rectilineum in duas huius generis Lunulas conuerti posse: si nimirum prius conuertatur in triangulum quodcunque rectangulum: cui deinde duæ Lunulæ æquales reperiantur. Constat etiam duabus huiusmodi Lunulis alias binas & binas æquales numero infinitas exhiberi posse: non secùs ac triangulo rectangulo, triangula rectangula æqualia numero infinita promptum est exhiberi. Constat etiam Meniscos huiusmodi augeri, minuiuè posse in data quauis ratione: si triangulum ACB in eadem ratione augeatur, vel minuatur.

PROP. XXVIII. THEOR.

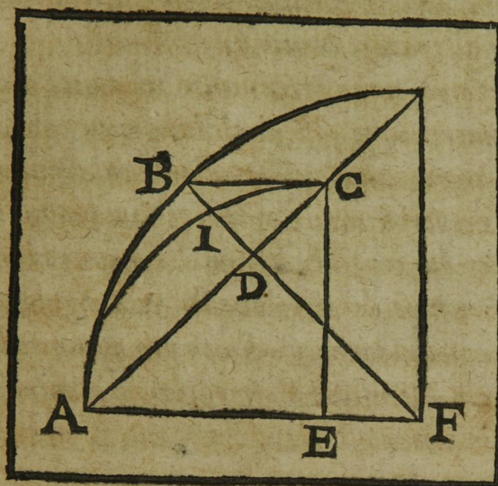
Si duo circuli, quorum vnus alterius sit duplus, sese tetigerint interiùs: & minoris Quadrans cum maioris parte octaua, lineâ rectâ iungatur: fiet triangulum mixtum duobus arcubus & rectâ lineâ illâ circumscriptum, æquale triangulo rectangulo Isosceli super eadem rectâ lineâ tanquam base constructo.

EXPOSITIO.

Fig.12. Duo circuli AB, AC, quorum ille sit huius duplus, sese in A tangant interius. Sit verbò arcus AB totius peripheriæ pars octaua & arcus AC, Quadrans: quos arcus iungat recta linea BC: super

qua

Figura Duodecima.



qua tanquam baſe conſtruatur triangulum Iſoſceles rectangulum B D C. Dico triangulum hoc æquale eſſe triangulo mixto A B C, arcubus A B, A C & rectâ B C comprehenſo.

Præparatio.

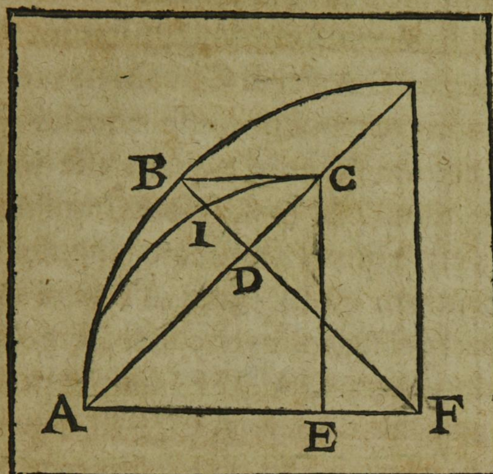
Circulorum centra E, & F rectâ lineâ iungantur; quæ neceſſariò in contactum A cadet. Ducantur etiam circulorum radij E C, F B. Ducatur denique chorda A C. Certum eſt primò radium C E rectum eſſe ad radium A E; inſiſtit enim angulus A E C ad centrum arcui A C; qui ex hypotheſi eſt circuli Quadrans. Certum eſt ſecundò chordam A C æqualem eſſe radio F B. Cum enim circulus A B ſit ex hypotheſi duplus circuli A C: ſit autem circulus radio A C deſcriptus, duplus eiuſdem circuli A C, eò quod circuli per

Fig.12. 2. lib.12. ſint inter ſe vt Quadrata diametrorum, aut etiam ſemidiametrorum; & Quadratum A C ſit duplum Quadrati E A vel E C, cum ſit vtrique ſimul æquale:) non poterunt non eſſe æquales rectæ A C, F B. Hinc certum fit tertiò æquales eſſe inter ſe tum D A, D F; tum D B, D C. Nam angulus C A E ſemirectus, eſt æqualis ſemirecto angulo A F B: hic enim ad centrum inſiſtit arcui A B, qui ex ſuppoſitione eſt pars octaua totius circuli ſui. Ergo in triangulo A D F duo latera D A, D F, ſunt æqualia: quibus ablatis ex æqualibus lineis A C, F B, æquales remanere neceſſe eſt duas D B, D C. Hinc conſtat quartò angulum B D C rectum eſſe. In triangulo enim A D F, cum duo latera D A, D F æqualia oſtenſa ſint; & oſtenſi æquales anguli A & F, ſcilicet ſemirecti; non poteſt non eſſe rectus angulus A D F atque adeo ei ad verticem B D C. Et quia, quintò æquales ſunt anguli D B C, D C B ob æqualia latera D B, D C. Erit vterque ſemirectus; & propterea linea C B lineæ A E parallela, ob æquales alternos angulos A C B, C A E. Eſt ergo B C ſicut A E perpendicularis ad E C. Atque adeo B C circulum in C tangit. Hæc omnia cum ita habeant propoſitum ſit colligetur.

Demonſtratio.

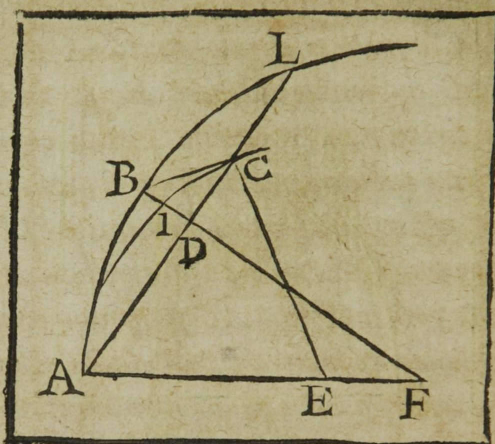
Circulus A B duplus eſt circuli A C ex ſuppoſitione. Ergo illius quarta pars dupla eſt quartæ partis, iſtius, ſectoris nimirum A E C. Ergo illius octaua pars quæ eſt ſector A F B, ſectori A E C, eſt æqualis.

Figura Duodecima.



lis. Sed duo triangula ADF, AEC ſunt æqualia propter baſes AC, AF, & angulos ſuper eiſdem æquales. Ergo illis ex ſectoribus æqualibus, detractis, remanebit ſegmentum AC abſciſſum lineâ AC, æquale ſemiſegmento ADB, arcu AB & rectis DA, DB comprehenſo. Dematur ſpatium ADI arcu AI: & rectis DA, DI contentum, quod eſt commune, remanebit triangulum mixtum DIC æquale triangulo mixto ABI. Addatur commune triangulum mixtum BIC. Fiet triangulum BDC, quod oſtenſum eſt rectangulum & Iſoſceles, æquale triangulo mixto BAC eandem baſim BC cum triangulo BDC habenti. Quæ quidem baſis BC oſtenſa eſt tangere in C circulum AC, atque adeo totam extra illum cadere, totúmque arcum AC aſſumere, vt triangulum mixtum ABC conſtituatur. Si igitur duo circuli, &c. Quod erat demonſtrandum.

Figura Decimatertia.



SCHOLIVM.

Fig. 13. *Eadem facta suppositione circulorum AB, AC sese tangentium in A: quorum ille sit duplus istius: si quælibet chorda AC ducatur, quæ segmentum AC minoris circuli abscindat, minus Quadrante circuli: & ad eam ex centro F circuli AB ducatur perpendicularis FD occurrens in B. arcui AB. Ad quod punctum B, ex C linea ducatur: fiet triangulum rectangulum CDB scalenum æquale triangulo mixto ABC, eadem base BC, & arcubus AB, AC comprehenso.*

Nam linea AC abscindit duo segmento ABL, AIC similia ex circulis se tangentibus. Sed segmenta similia per 12. huius. Ita sunt inter se vt circuli, quorum sunt segmenta. Ergo segmentum ABL duplum est segmenti AIC. Ergo semisegmentum ABD, æquale est segmento AIC. Dematur commune triangulum mixtum AID: remanebit triangulum

triangulum mixtum A B I æquale triangulo mixto I C D. Et addito triangulo mixto B I C, fiet triangulum rectangulum B D C æquale triangulo mixto A B C: dixi verò chordam A C ſubtendere debere arcum A C vel A L Quadrante circuli minorem: quia in tali caſu linea B C iungens arcuum extrema puncta B & C, tota extra arcum A I C cadit, nec vllam partem ſegmenti A I C abſcindit: quod neceſſarium eſt ad duo triangula præfata, æqualia conſtituenda. At verò ſi chorda A C ſegmenta circulorum abſcinderet Quadrante maiora: linea illa B C ſubiret ſegmentum AIC, nec vnicum triangulum mixtum conſtitueretur æquale triangulo rectangulo B D C.

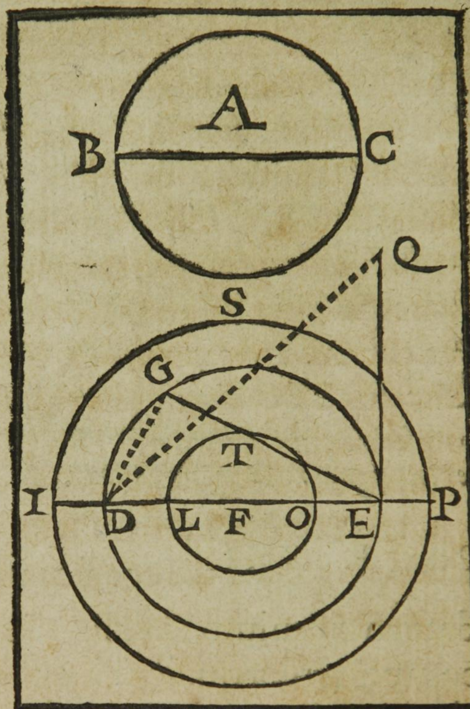
PROP. XXIX. PROBL.

Circa datum circulum D G E orbem, ſeu Armillam componere æqualem dato circulo A. Et quando circulus A minor fuerit circulo D G E, etiam intra ipſum, orbem ſtatuere eidem circulo A æqualem.

Conſtructio.

Ducatur E Q ad diametrum D E circuli dati, perpendicularis, & æqualis diametro B C circuli alterius dati A, & iungatur recta D Q. Qua bifariam diuiſa, ſumatur F I vel F P æqualis ſemiſſi illius: tum centro F per I deſcribatur circulus I S P. Dico orbem inter peripherias I S P, D G E concluſum, æqualem eſſe circulo A. *Fig. 14.*

Figura Decimaquarta.



Demonstratio.

In triangulo rectangulo D E Q, basis D Q potest duo latera E D, E Q. Circulus ergo circa D Q, hoc est, I P, ei æqualem; æqualis est duobus circulis circa E D, & circa E Q, hoc est, duobus circulis D G E, & A. Ergo excessus circuli I S P supra circulum D G E, qui excessus est orbis circumpositus circulo D G E, est æqualis circulo A dato. Quod erat faciendum.

Quod si orbis intra circulum D G E statuendus proponatur æqualis circulo A, qui minor sit quam D G E: ita absoluetur.

Constru

Conſtructio & Demonſtratio.

Applicetur E G æqualis diametro B C, circuli A in circulo D G E: tum iungatur D G: quæ ſtatuatur diameter circuli L T O centro F deſcripti. Dico orbem inter peripherias D G E, & L T O interceptum, æqualem eſſe circulo A nam propter triangulum D G E rectangulum, circulus circa baſim D E deſcriptus, æqualis eſt duobus circulis circa latera G D, G E deſcriptis. Cum ergo circulus LTO ſit æqualis ei, qui circa D G deſcriberetur: erit orbis peripheriis D G E, LTO contentus, æqualis circulo circa G E deſcribendo, hoc eſt, circulo A dato: cuius diametro B C, æqualis eſt per conſtructionem recta E G. Ergo hoc etiam in caſu Problema ſolutum eſt. Fig. 14.

SCHOLIVM.

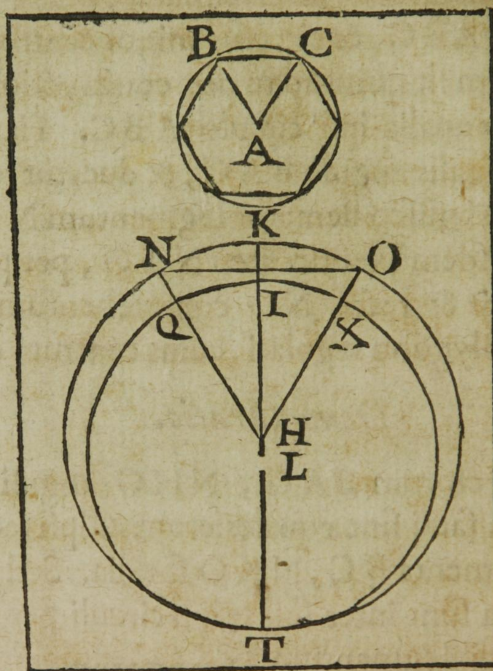
Si loco vtriuſque illius orbis tam circumſcripti quam inſcripti, Lunulam efformare placeat circulo dato A æqualem: facile id abſoluetur. Si eadem arte inuentis diametris D Q, D G circuli deſcribantur eccentrici tangentes datum circulum D G E in puncto D.

PROP. XXX. PROBL.

Dato cuiuis polygono regulari æqualem mixtam figuram, cuius duo latera ſint duo arcus ſeſe tangentes, componere.

Conſtru

Figura Decimaquinta.



Constructio.

Fig. 15. Datum sit hexagonum regulare, verbi gratia, quod ſcilicet circulo inſcribatur regulariter: cuius centrum, A, & ſemidiameter A B reperiatur linea, quæ ſextuplum poſſit ſemidiametri A B (illam ſcilicet potentiâ toties contineat, quot lateribus conſtat datum polygonum) huic autem æqualis ſit recta H T, quo radio circulus deſcribatur N O T. Reperiatur deinde linea potentiâ quintupla radij AB; cui ſit æqualis recta L T; facto autem centro L circulus per T deſcribatur: qui priorem in ipſo puncto T tanget & Meniſcum per

contactum ſimul conſtituent, æqualem neceſſariò circulo A B C. Cum enim circulus N O T ſit ſextuplus circuli A B C, & circulus minor centro L deſcriptus eiuſdem ſit quintuplus per conſtructionem: erit Meniſcus æqualis ipſi circulo A B C. Fiat angulus N H O æqualis angulo B A C, & ducatur recta N O. Dico ſi ex Meniſco dematur ſegmentum N K O, reliquum eiuſdem Meniſci arcu N T O, peripheriâ circuli minoris & rectâ N O comprehenſum, æquale eſſe dato polygono regulari, cuius centrum eſt A.

Demonſtratio.

Cum ſectorum B A C, N H O anguli A & H ad centrum facti ſint æquales: erunt & ipſi ſectores, & abſciſſa ſegmenta B C, N K O ſimilia. Sed ſegmenta ſimilia ita ſunt inter ſe, vt ipſi circuli per 12. prop. Huius. Ergo ſegmentum N K O ſextuplum eſt ſegmenti B C. Hoc eſt, æquale eſt ſegmentis ſex æqualibus, quorum chordæ hexagonum circulo A B C inſcribunt. Si igitur ſegmentum N K O ex Meniſco. Et ſegmenta ſex ſegmento B C æqualia ex circulo demantur; reliqua, nempe mixtam figuram præfatam; & hexagonum regulare æqualia eſſe neceſſe eſt. Dato ergo cuiuis Polygono regulari æqualem mixtam figuram compoſuimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Cum Lunula duabus peripherijs ſeſe in T tangentibus intercepta æqualis ſit per conſtructionem circulo A B C: ſít- Fig. 15.

Figura Decimaquinta.

que pars sexta circuli NOT. Cuius etiam sexta pars est sector HNO est enim similis factus sectori ABC. Erit hic sector HNO tam circulo ABC quam Lunulæ æqualis. Si igitur dematur mixtum Quadrilaterum NQXO commune: remanebit triangulum mixtum HQX (quod quidem dici sector non debet, cum rectæ HQ, HX à centro L arcûs QX non prodeant) æquale duobus reliquis cornibus æqualibus NQT, OXT. Lunulæ: eiúsque sectoris dimidia pars IHQ, & IHX æqualis Lunularum alterutri.

SCHOLIVM.

Contingere potest in huius Lunulæ constructione: vt recta

Fig. 16. pag. 60.

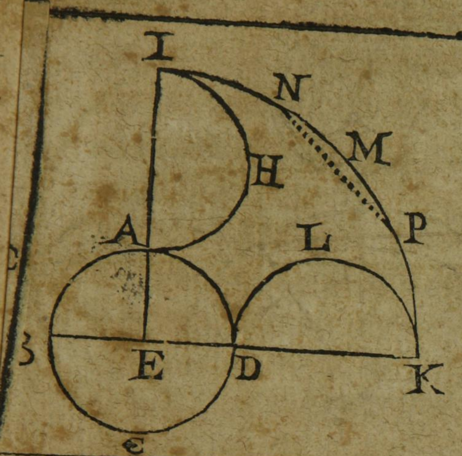


Fig. 17. pag. 62.

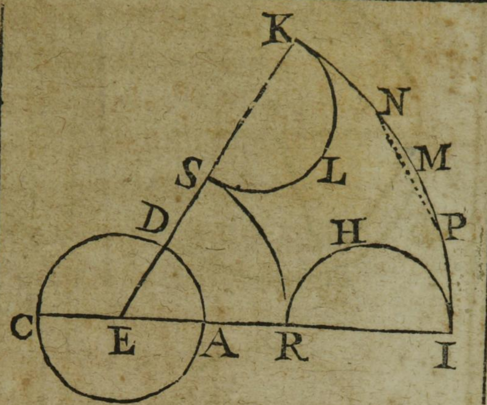
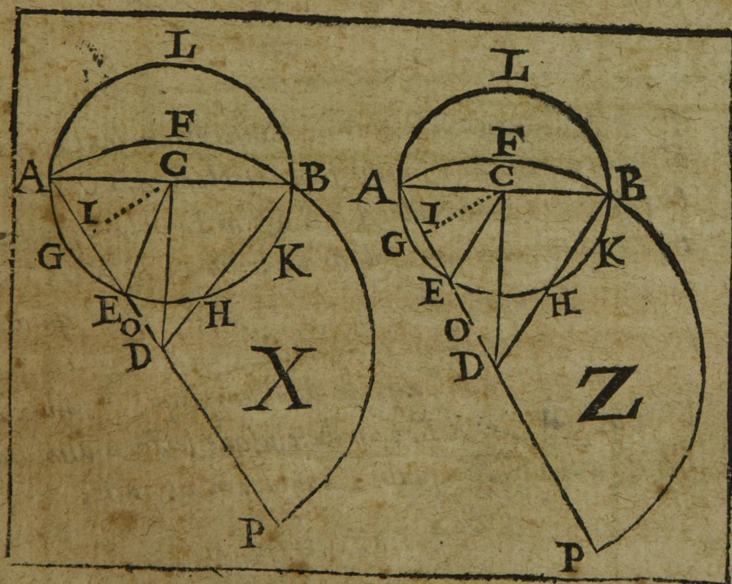


Fig. 22. pag. 76. & 78.



drans. Dico igitur Quadrilaterum contentum Quadrante I M K, ſemiperipheriis I H A, K L D & Quadrante A D, æquale eſſe dato circulo A B C D.

Demonſtratio.

Radius E I circuli I M K triplus eſt radij E A circuli A B C D ex conſtructione. Et quia figuræ ſimiles ſunt in duplicata ratione ſuorum laterum homologorum: erit Quadrans maior E I M K noncuplus Quadrantis minoris E A D. Hoc eſt, æqualis erit bis circulo A B C D & præterea Quadranti E A D. Demantur ergo duo ſemicirculi I H A, D L K. Et Quadrans E A D ex illo maiore Quadrante E I M K, remanebit Quadrangulum cyclicum præfatum æquale dato circulo A B C D. Quod præſtandum erat.

SCHOLIVM.

Hic demum obſeruatione dignum occurrit. Quod ſi circulo A B C D Enneagonum regulare inſcriberetur: & in Quadrante I M K ſegmentum N M P abſcinderetur rectâ N P, quæ latus Enneagoni circulo I M K inſcribendi foret: reliquum ſpatium præfati quadranguli cyclici eſſet æquale Enneagono intra circulum A B C D inſcripto. Nam ſegmentum N M P nuncuplum foret ſingulorum ſegmentorum ſimilium, circuli A B C D. Hoc eſt, illis omnibus ſimul foret æquale. Eo ergo dempto ex cyclico Quadrangulo; reliquum ſpatium neceſſe eſt æquale eſſe Enneagono circuli A B C D.

PROP. XXXII. PROBL.

Dato circulo Quadrangulum cyclicum æquale rurſus exhibere.

Conſtru

Figura Decimaseptima.

Constructio.

Esto circulus datus C D A, cuius centrum E: in quo arcus statuatur D E A Graduum 60, ita vt arcus D A sit totius circuli sextans. Producantur autem radij E A, E D, itavt vterque productus, ille vsque ad I; hic verò vsque ad K, bis contineat diametrum circuli dati C D A: cui sint propterea æquales tam E S, S K quam E R, R I. Tum centro E per S & R arcus describatur, eíque concentricus alter K M I. Denique circa diametros S K, R I semicirculi delineentur; qui arcus S R, K M I tangent: eorúmque peripheriæ vnâ cum illis Quadrilaterum Cyclicum component K L S R H I K. Quod assero circulo C D A esse æquale. *Fig.17.*

Demonstratio.

Radius E K arcûs K M L quater continet radium

ED circuli CDA. Ergo cum circuli rationem habeant duplicatam radiorum; circulus KMI ſedecies continebit circulum CDA. Illiúſque ſextans EKI, huius ſextantem EDA etiam ſedecies complectetur. At ſextans ESR, cuius radius ES duplus eſt ex conſtructione radij ED, ſextantis EDA; ipſum ſextantem EDA quater continebit ob radiorum duplicatam rationem. Reliquum igitur mixtum Quadrilaterum KSRI duodecies complectitur ſextantem EDA. At duo ſemicirculi KLS, IHR, eundem ſexies continent. Ergo reliquum Quadrilaterum cyclicum, ipſum etiam ſexies continebit: hoc eſt, toti circulo CDA æquale erit. Exhibuimus igitur Quadrangulum cyclicum æquale dato circulo. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Fig.17. *Poſſunt ergo duo huiuſmodi Quadrangula cyclica diuerſa, duobus præcedentibus modis inuenta, æqualia fieri inter ſe: ſi nimirum duo dati circuli, quibus debent æqualia inueniri Quadrangula, æquales ipſi ſint inter ſe. Imò alia & alia alijs modis definiri poſſent æqualia tum inter ſe, tum datis circulis: quæ proſequi pluribus operæ pretium non fuerit.*

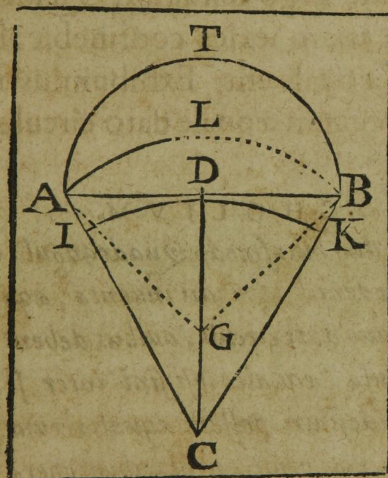
Quod ſi circulo CDA polygonum regulare ſedecim laterum inſcribatur; ſpatium ei æquale deſignari poſſet in Quadrangulo cyclico, ducta chorda NP, quæ ſit latus polygoni ſedecim laterum circulo KMI inſcribendi. Eſt enim ſegmentum NP æquale ſegmentis omnibus ſimul ſumptis, quæ à ſedecim chordis Polygoni circulo CDA inſcripti, abſcindūtur.

PROP.

PROP. XXXIII. THEOR.

Si super latere A B, trianguli æquilateri A B C semicirculus A T B describatur: describatur autem centro C, radio C D, (qui est perpendicularis ad latus A B) arcus I D K. Dico figuram semiperipheria A T B, & arcu I D K, rectísque lineolis A I, B K contentam æqualem esse triangulo æquilatero.

Figura Decimaoctaua.



Demonstratio.

Cum circulus radij C D, triplus sit circuli, radij D A. (Est enim C D potentiâ triplus ad A D radium) erit etiam semicirculus radij C D triplus semicirculi A T B radij A D. Sed semicirculus ille est etiam triplus sectoris C I K (siquidem tres sectores sectori C I K æquales Fig. 18.

æquales in ſemicirculo illo continentur) ergo ſector CIK æqualis eſt ſemicirculo ATB. Addantur vtrique duo mixta triangula DAI, DBK: fiet triangulum CAB æquale præfato ſpatio mixto IATBKI Quare. Si ſuper latere AB, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XXXIV. THEOR.

Si in ſchemate propoſitionis antecedentis LunulaHippocratica deſcribatur intra ſemicirculum ATB, ducto eius arcu interno ALB: quadrangulum mixtum, arcubus ALB, IDK; & rectis lineis AI, BK comprehenſum, in ſpatium rectilineum conuertere licebit.

Demonſtratio.

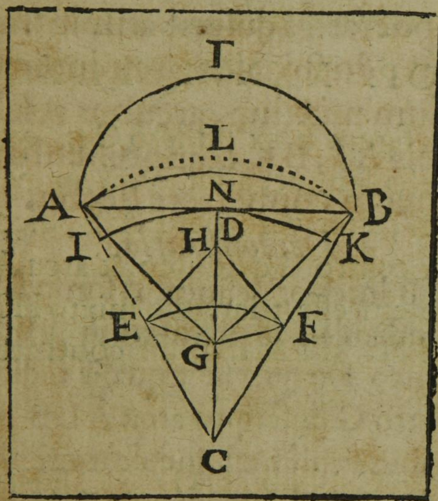
Fig. 18 Arcus ALB interior delineatur ſumptâ DG in recta DC perpendiculari ad diametrum AB. Semicirculi in eius centro D; quæ ſit æqualis radio DA vel DB; & ex centro G deſcripto arcu ALB per A & B. Vt in ſuperioribus ſæpiùs eſt inculcatum, oſtenſumque triangulum AGB æquale eſſe Lunulæ Hippocraticæ ATBLA. Si igitur ex mixto ſpatio propoſitionis antecedentis ATBKDIA dematur Lunula ATBLA; & ex triangulo æquilatero ACB, quod illi ſpatio mixto eſt æquale per Prop. antecedentem, dematur triangulum AGB. Remanebit quadrilaterum mixtum ALBKDIA æquale duobus triangulis ſimul GAC, GBC. Quare licet ſpatium illud mixtum in rectilineum conuertere. Quod erat probandum.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

In repetita figura Propositionis antecedentis si sumatur linea GH æqualis lineæ GC; & à punctis E & F, in quibus CA, CB bifariam diuiduntur, destinentur ad H lineæ EH, FH: fiet Trapezium EHFC æquale duobus simul triangulis GAC, GBC.

Figura Decimanona.



Demonstratio.

Iungantur GE, GF. Duo triangula AGE, EGC *Fig.19.* propter bases æquales EA, EC; æqualia sunt: duo item triangula GEC, GEH æqualia sunt, cum eorum bases GC, GH sint ex suppositione æquales. Ergo æqualia sunt inter se duo triangula EAG, EHG. Quibus si addatur commune triangulum EGC: fient

duo triangula A G C, E H C æqualia. Pari modo oſtendentur triangula duo B G C, F H C æqualia. Totum ergo Trapezium E H F C æquale eſt duobus triangulis ſimul G A C, G B C. Quod erat probandum.

Corollarivm.

Cum ergo mixtum Quadrilaterum arcubus A L B, IDK & rectis AI, B K comprehenſum, ſit æquale oſtenſum duobus triangulis G A C, G B C. Æquale etiam erit Trapezio E H F C illis triangulis æquali.

PROP. XXXVI. THEOR.

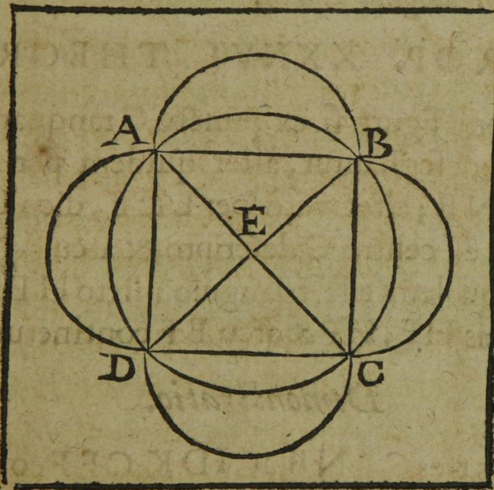
In eadem figura ſi ex puncto C tanquam centro duo arcus deſcribantur, alter quidem per A & B, nempe A N B; alter verò per E & F, dico Lunulam arcu A L B ex centro G deſcripto, & arcu A N B contentam, æqualem eſſe triangulo mixto H E F, quod ſcilicet rectis H E, H F & arcu E F continetur.

Demonſtratio.

Fig. 19. Sectores tres C A N B, C I D K, C E F eodem centro C deſcripti, ſimiles ſunt, atque adeò per Prop. 12. huius eandem inter ſe rationem obſeruant, quam circuli, ad quos pertinent. Cum igitur radius C A duplus ſit radij C E: erit ſector C A B ſectoris CEF quadruplus ob rationem radiorum C A, C E duplicatam. Sector verò C I D K, eiuſdem ſectoris C E F triplus eſt. Nam radius C D triplum poteſt lineæ D A, cui æqualis eſt radius C E. Eſt ergo ſector C E F exceſſus ſectoris

ſectoris C A B ſupra ſectorem C I K : atque adeò æqualis mixto Quadrilatero A N B K D I A. Quo duo illi ſectores differunt. Cum ergo Trapezium E H F C æquale oſtenſum ſit mixto Quadrilatero ALBKDIA, ſi ex eo dematur Quadrilaterum A N B K D I A ; & ex Trapezio ſector CEF. Remanebunt Lunula ALBN & triangulum mixtum H E F æqualia. Quare ſi ex puncto C tanquam, &c. Quod erat demonſtrandum.

Figura Vigeſima.



MONITVM.

Vt toti huic exercitationi præbuit occaſionem illa Hippocratis Lunula : ita eadem alias & alias rationes curuilinea in rectilinea conuertendi quam plurimas aperuit : quas omnes proſequi longioris foret operæ, nec operæ foret fortaſſè pretium. Vna tamen, quæ nec inelegans nec iniucunda futura eſt, omitti non debet : quæ circa polygona regularia, hoc *Fig.20*

est, æqualibus & angulis & lateribus constantia & circulo vel inscribi vel circumscribi possunt, versatur. Sicut enim, si circa Quadrati ABCD singula latera semicirculi describantur; & ex Quadrati centro E describatur circulus per eius angulos transiens efformantur quatuor Lunulæ, quæ simul Quadrato ipsi sunt æquales, vt constat ex Lunulæ Hippocratis Constructione. Sicut, inquam, circa Quadratum polygonorum regularium nobilissimam figuram, hæc ita habent. Ita fortasse aliquid simile occurret: si circa latera aliorum polygonorum semicirculi delineentur, & ex eorum polygonorum centro circulus fiat, qui æqualis sit omnibus semicirculis polygono circumpositis, siue per angulos polygoni transeat, siue non: quod ex constructione constabit quam in singulis trademus. Aggrediamur ergo regularium figurarum primam, triangulum scilicet æquilaterum: quod huiusmodi constructionem respuere demonstro sequenti Propositione eiusque Corollario.

PROP. XXXVII. THEOR.

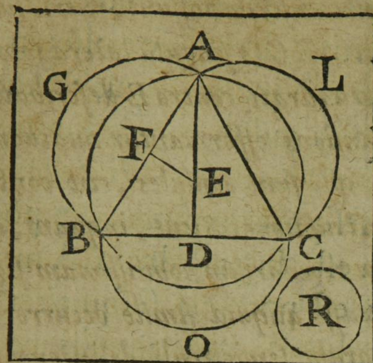
Si circa latera æquilateri trianguli ABC semicirculi tres describantur: describatur autem circulus per tres eius angulos transiens ex eiusdem centro E. Erit hic circulus tribus semicirculis minor.

Demonstratio.

Fig. 21. Iungantur centra E & F circulorum ABC, & AGB lineâ rectâ EF. Hæc cum bifariam in F diuidat rectam AB subtendentem arcum AIB per cuius centrum E transit: erit ad ipsam AB perpendicularis.

Duo

[Figura Vigesimaprima.



Duo igitur triangula A D B, A F E sunt æquiangula: habent enim angulum A communem, & angulos F & D rectos atque adeò æquales; æquales ergo & reliquos A B D, A E F. Est ergo A E radius circuli A B C, ad A F radium semicirculi A G B: vt A B ad A D. Sed A B est ad A D potentiâ, sesquitertia, vt in superioribus patuit. Ergo & A E potentiâ est sesquitertia lineæ A F: circulus ergo A B C est sesquitertius circuli A G B integri. Posito ergo circulo A B C 8, circulus A G B integer est 6; at verò ipse semicirculus A G B erit 3: cui si reliqui duo semicirculi A L C, B O C addantur: tres simul semicirculi erunt 9. Maiores ergo sunt tres simul semicirculi illi, quàm totus circulus A B C. Cum habeat ad semicirculos rationem quam 8. habet ad 9. Quare. Si circa latera, &c. Quod erat probandum.

Confirmatio.

Linea quæ sesquialterum potest radij F A, est radius circuli æqualis tribus semicirculis, tribus trian- *Fig.21.*

guli lateribus, insistentibus. Tres enim illi semicirculi ad duos semicirculos, hoc est, ad circulum vnum integrum rationem habent sesquialteram, vt patet; ad quem, eandem rationem sesquialteram habet etiam circulus ille, cuius radius sesquialterum potest radij F A. Sed radij eiusdem F A radius E A circuli triangulo circumscripti, sesquitertium tantùm potest, vt paulo ante stabilitum est. Ergo radius E A minor est quam radius ille, qui est potentiâ sesquialter radij F A; & qui circulum tribus illis semicirculis æqualem describit. Duarum siquidem linearum illa maior est, quæ ad eandem lineam F A maiorem rationem habet. Quis verò ambigat rationem sesquialteram sesquitertia maiorem esse. Quare rursus si circa latera, &c. Quod erat confirmandum.

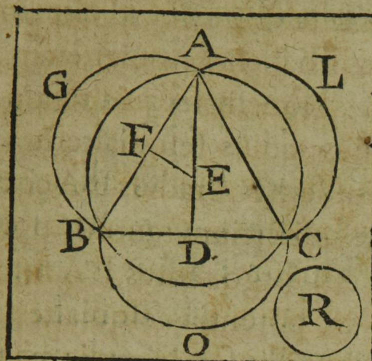
Corollarium.

Hinc sequitur quod suprà præmonui; nimirum non posse circulum describi vel circa triangulum æquilaterum, qualis est A B C, vel alium intra hunc ipsum circulum, qui sit æqualis tribus semicirculis, qui super tribus lateribus trianguli eriguntur. Ostensus siquidem est radius, quo circulus illis æqualis describeretur, maior radio E A. Ergo circulus ille ambiret & ipsum circulum A B C, & triangulum circa quod descriptus est: ipsorûmque semicirculorum arcus intersecaret.

Scholium.

Fig. 21. *Cum ostenderim radium circuli æqualis tribus semicirculis, qui lateribus trianguli A B C incumbunt, esse potentiâ sesquialte*

Figura Vigeſimaprima.



ſeſquialterum radij F A: is facilè inuenietur: eſt enim, vt Elementa docent, media linea proportionalis inter lineam F A, & lineam compoſitum ex F A & eius ſemiſſe; quam etiam hoc modo definiemus. Reperiatur linea ad quam radius F A ſit potentiâ duplus: tum alia linea inquiratur, quæ ad hanc proximè inuentam ſit potentiâ, tripla hæc enim erit potentiâ, radij F A ſeſquialtera, vt patet attendenti. Porrò cum oſtenſum ſit inter demonſtrandum hanc propoſitionem, tres ſemicirculos circa triangulum, ad circulum A B C rationem habere, quam 9. habet ad 8. ſi circulus inueniatur, cuius circulus A B C ſit octuplus, ſiue qui ſit pars octaua (ſit inuentus per Elementa, huiuſmodi circulus R) erit circulus A B C cum hoc circulo R, æqualis tribus præfatis ſemicirculis. Quare ſi auferantur tria ſegmenta communia vtrique illi æquali quantitati: remanebit triangulum æquilaterum A B C ſimul cum circulo R æquale tribus ſimul Lunulis: quarum cornua tribus angulis trianguli inſiſtunt. Atque hæc ſatis de prima regulari figura. De ſecunda verò, quæ Quadratum eſt, iam in monito præcedenti & alibi ſæpiùs actum eſt.

Aggredia

Aggrediamur Pentagonum & reliqua deinceps Polygona regularia: ad quæ omnia ſequens Theorema maximè neceſſarium eſt.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si circulo Pentagonum, aliáque Pentagonum numero laterum ſuperantia Polygona regularia inſcribantur: ſemicirculi ſuper omnibus Polygoni lateribus deſcripti, omnes ſimul ſumpti, minores ſunt circulo illo, cui inſcribuntur Polygona: & quidem eo minores, quo pluribus lateribus conſtabit Polygonum.

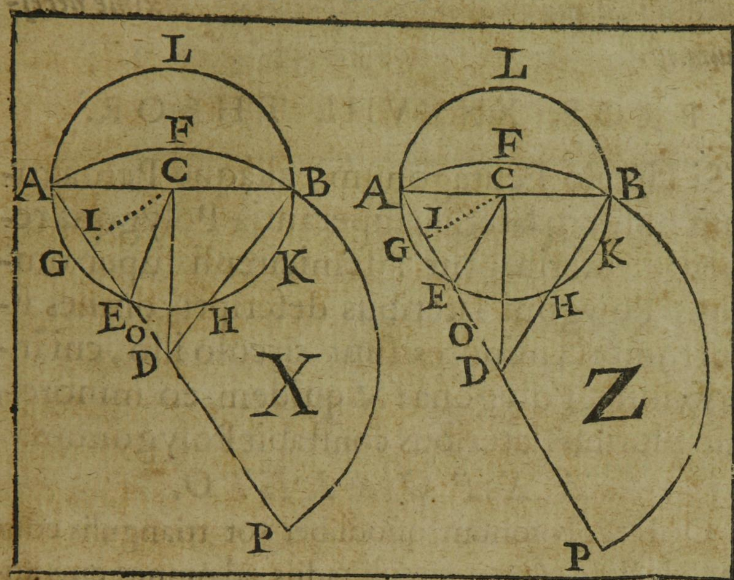
EXPOSITIO.

Quia Polygonum quodlibet tot triangulis conſtat, ductis à centro circuli radiis ad omnes eius angulos; quot lateribus ipſum conſtat; totidemq́ue fiunt ſectores circuli Polygonum inſcribentis, æquales inter ſe. Satis fuerit, ſi vnus aliquis ſemicirculus ſuper vno latere Polygoni deſcriptus, minor oſtendatur ſectore illo; quem radij ad latus illud, ſiue ſemicirculi diametrum, ducti comprehendunt. Hinc enim euidens eſt omnes ſemicirculos omnibus ſectoribus, hoc eſt, toto circulo inſcribente minores eſſe.

Fig. 22 In circulo igitur A F B P, centro D deſcripto ſit A B latus Pentagoni & aliûs cuiuſcumque Polygoni, Pentagonum numero laterum ſuperantis, verbi gratia hexagoni: ſuper quo ſemicirculus deſcribatur A L B: & ducantur radij D A, D B. Dico igitur ſemicirculum A L B minorem eſſe ſectore D A F B.

Præparatio.

Figura Vigesimasecunda.



Præparatio.

Deſcribatur totus circulus A L B ducatur recta DC futura perpendicularis ad A B, cum ipſam biſecet; ducatur item C I ad radium D A perpendicularis. Ducatur denique C E ad punctum E : in quo D A ſecatur à circulo A L B : erit punctum illud E inter A & D. In Pentagono cæteríſque Polygonis. Nam in omnibus angulus ADB eſt neceſſariò minor recto: inſiſtit enim arcui A F B, qui minor eſt circuli Quadrante ex ſuppoſitione, quod ſit vel quinta pars, vel alia minor quinta totius circuli. Ergo anguli ADB ſemiſſis ADC, minor eſt angulo ſemirecto. Ergo in triangulo rectangulo A C D, angulus C A D maior eſt ſemirecto; maior ergo quàm angulus C D A : maius proinde eſt

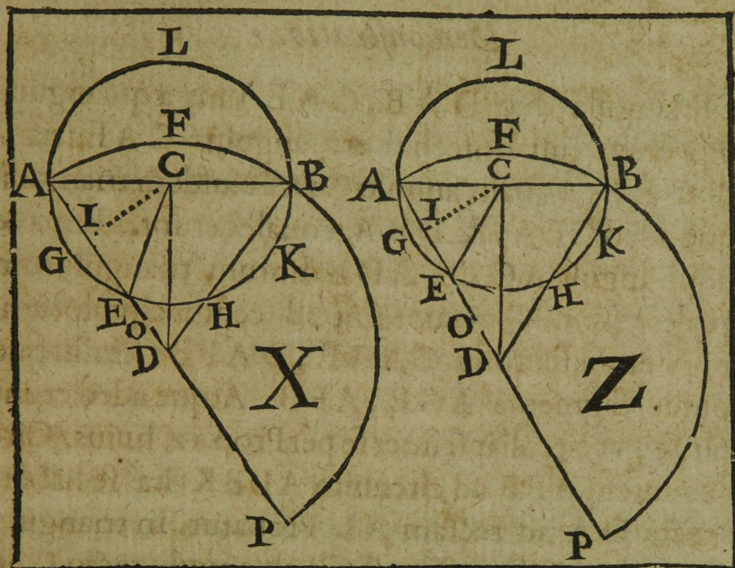
latus C D, quàm C A. Quare circulum radio C A deſcriptum neceſſe eſt ſecare rectam C D, inter C & D: ergo & rectam D A inter A & D ſecturus eſt, putâ in E; ac perinde rectam D B in H.

Demonſtratio.

Triangula duo D A B, C A E ſunt æquiangula. Cum enim ſint Iſoſcelia: erit angulus C A E trianguli C A E, æqualis angulo C E A eiuſdem trianguli: atque adeò C E A, & D B A æquales erunt. Ergo & reliqui anguli A C E, A D B horum triangulorum æquales erunt. Qui cum ſint ad centra circulorum:
Fig. 22 ſimiles erunt ſectores C A G E, D A F B: ſimiliaque proinde ſegmenta A G E, A F B. Atque adeò erunt inter ſe, vt circuli ipſi inter ſe per Prop. 12. huius. Circulus autem A F B ad circulum A L B K ita ſe habet, vt recta D A ad rectam A I. Probatur. In triangulo rectangulo A C D ducta eſt C I ab angulo recto C ad baſim D A perpendicularis. Ergo vt ſe habet D A ad A C, ita eſt A C ad A I. Ergo ita eſt circulus radij D A ad circulum radij C A vt D A ad A I. Quod cum ita ſit. Cum linea D A contineat A I bis (eſt enim AE eius dupla) & præterea particulam ED: etiam ſegmentum A F B continebit ſegmentum A G E bis, hoc eſt duo ſegmenta A G E, B K H, & præterea aliquid amplius. Addatur tam ſegmento A F B quam ſegmentis A G E, B K H, mixtum ſpatium A B H E A: erit quadrilaterum mixtum arcubus A F B, EH; & rectis A E, B H contentum maius ſemicirculo AGEHKB. Quid ſi ad illud quadrilaterum mixtum addatur adhuc triangu

triangulum mixtum E D H, vt fiat ſector D A F B, quantò maior futurus eſt; quàm ſemicirculus A E H B ſiue A L B. Atque hæc eſt prior Propoſitionis pars.

Figura Vigeſimaſecunda.



Poſterior verò quod ſector futurus ſit eo maior ſemicirculo; quo plura fuerint Polygoni latera; euidens fiet aſſumptis eiſdem figuris ad Pentagonum & hexagonum pertinentibus. Quæ quia ambæ eiſdem Caracteribus inſigniũtur; vt facilè deinceps diſtinguãtur: priorem ad Pentagonum ſpectãtem notâ X, poſteriorem, quæ ad hexagonũ pertinet, notâ Z, diſcernemus. In vtraq; porrò figura producatur ſemidiameter A D, & cõpleatur ſemicirculus AFBP. Nunc ad rem. Oſtenſum eſt proximè in vtroque ſchemate X & Z, ita eſſe ſemicirculum ABP ad ſemicirculum A E H B, vt eſt

recta D A ad rectam A I (licet enim de circulis integris facta tantùm mentio fuerit: par tamen est semicirculorum ratio, qui sunt semisses terminorum) vt item eadem D A ad A I, ita esse sectorem D A F B ad sectorem C A G E. Ergo vt semicirculus A B P ad semicirculum A E H B: ita est sector D A F B ad sectorem C A G E. Et permutando, vt semicirculus A B P ad sectorem D A B; ita est semicirculus A E H B ad sectorem C A E. Hactenus vtrique figuræ communia tradita sunt: deinceps vtrique propria exponentur.

Fig. 22

In figura X Pentagoni tam semicirculus A B P sectoris D A B: quam semicirculus A E H B sectoris C A E, est duplus sesquialter, vt patet. Sumatur ergo in recta A D, pars eius A O dupla sesquialtera ad rectam A I. Tunc quia ita est sector D A B ad sectorem C A E; vt recta D A ad rectam A I: & vt sector C A E ad semicirculum A E H B: ita est recta A I ad rectam A O. Ex æquo ita erit D A ad A O, vt sector D A B ad semicirculum A E H B. His stabilitis, inquirendum est an sector D A B, in figura Z hexagoni, ad semicirculum suum A E H B maiorem habeat, aut minorem rationem, quàm recta D A ad rectam A O.

Quia igitur semicirculus A B P sectorem D A B: & semicirculus A E H B sectorem C A E, ter continet; sumatur recta A I à puncto A vsque ad O, ter. Tunc, quia est sector D A B ad sectorem C A E; vt recta D A ad rectam A I: & vt sector C A E ad semicirculum A E H B, ita ex constructione, recta A I ad A O. Erit ex æquo, sector D A B, ad semicirculum

A E H B:

AEHB: vt recta D A ad A O. His in vtraque figura declaratis: cum in vtraque ſupponatur eadem linea D A; inquirendum eſt an binæ lineæ A O ſint æquales; an certè inæquales. Propoſitio noſtra inæquales aſſerit dum vult in figura Z hexagoni maiorem eſſe rationem ſectoris D A B ad ſemicirculum A E H B, quam ſectoris D A B in figura X Pentagoni, ad ſemicirculum A E H B. Neceſſe eſt enim, ſi vera eſt, lineam A O in Pentagono maiorem eſſe, quàm lineam A O in hexagono. Sic enim recta D A vtrobique æqualis minorem habebit rationem ad A O maiorem in Pentagono, quam ad A O minorem in hexagono; atque adeo & ſector D A B ad ſemicirculum A E H B in Pentagono, minorem habebit rationem quam in hexagono: Quas rationes metiuntur binæ & binæ rectæ D A, A O.

Quantitas ergo duarum rectarum A O inueſtiganda eſt, vt æqualitas vel inæqualitas earum eluceat. Quod non alia breuiore, nec vniuerſaliore ratione abſoluetur: quam ope numerorum: licet enim in certis quibuſdã caſibus ratio ſuppetat Geometrica, quâ inæqualitas hæc innoteſcat; vix tamẽ occurrat, quæ Polygonis omnibus cõuenire poſſit. Sic ergo habet calculus.

In triangulo rectangulo D C A figuræ X Pentagoni. Angulus C D A notus eſt, nimirum, G 36. Semiſſis ſcilicet anguli A D B in centro Pentagoni, qui eſt, G 72. Poſito ergo ſinu toto D A 100000. Erit C A 58779. Hæc media eſt proportionalis inter D A & A I. Si igitur Quadratum rectæ C A 3454970841

diuidatur per D A 100000 fiet A I 34549. Sumatur hæc bis cum eiuſdem ſemiſſe, fiet A O 86373 ad A I dupla ſeſquialtera.

Fig.22 At verò in triangulo rectangulo D C A figuræ Z hexagoni, angulus C D A eſt, G. 30. Eius ſinus C A (poſito ſinu toto D A) eſt 50000 eius Quadratum eſt 2500000000. Quod per D A diuiſum, producit A I 25000. Cuius tripla A O erit 75000.

Iam hæ ambæ A O inter ſe conferantur: hæc poſterior longe minor erit; quàm prior 86373 ad Pentagonum ſpectans. Quare maior eſt proportio rectæ D A ad A O in hexagono, quàm in Pentagono. Ergo etiam maior erit ratio ſectoris D A B ad ſemicirculum A E H B in hexagono, quàm in Pentagono. Ergo ſemicirculus ſuper latere Polygoni alicuius deſcriptus eò minor eſt ſectore ſibi reſpondente: quò plura fuerint Polygoni latera. Quia verò ſectores circulum cui inſcribitur Polygonum, conſtituunt: eò maior futurus eſt ille circulus omnibus ſemicirculis ſuper lateribus Polygoni deſcriptis, quò plura fuerint latera eiuſdem. Vera ergo eſt vtraque pars Propoſitionis.

COROLLARIVM.

Fig.22 *Hinc colligas ſectorem omnem; cuius angulus ſit recto minor, maiorem ſemper eſſe ſemicirculo: cuius diameter ſit recta ſubtendens arcum ſectoris. Demonſtratum ſiquidem eſt in ſchematibus duobus ſuperioribus X & Z, ex eo quod angulus A D C ſit acutus (acutum eſſe neceſſe eſt poſito angulo A D B, eius duplici, acuto) ſegmentum A F B, ita eſſe*

ad segmentum A G E; vt recta D A ad rectam A I. Ideóque, consequentibus duplicatis, ita erit segmentum A F B, ad duo segmenta A G E, B K H; vt recta D A ad rectam A E. Cum ergo D A, in hoc casu semper maior futura sit, quàm A E (semper enim angulus D A C maior erit angulo C D A, eò quod hic minor sit semirecto; cum eius duplus A D B minor recto supponatur: atque adeo D A C maior semirecto, vt ambo simul rectum adæquent. Ergo recta C D semper maior erit quam C A; & circulus centro C descriptus rectas D C, D A supra D secabit) etiam segmentum A F B maius futurum est quàm duo segmenta simul A G E, B K H. Addatur commune Quadrilaterum mixtum A E H B: fiet Quadrilaterum mixtum A E H B F A maius semicirculo A E H B. Quod si ad Quadrilaterum addatur adbuc triangulum mixtum D E H. Vt fiat sector D A F B: multò maior futurus est hic sector, quàm semicirculus præfatus A E H B, & quidem eò maior, quò acutior fuerit sectoris angulus A D B.

PROP. XXXIX. PROBL.

Datis duobus sectoribus D A B, C E F dissimilibus; quorum anguli D & C rationem habeant notam, eam nimirum quam habent lineæ G, H; eorum alterutrum ad æqualem sectorem, alteri similem reuocare.

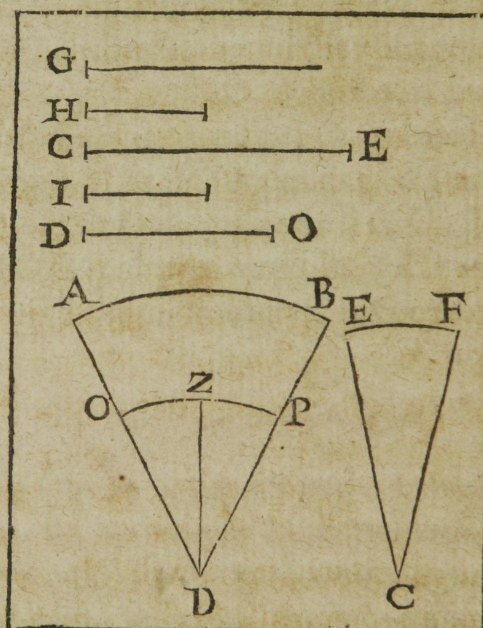
Constructio.

Sit sector C E F ad sectorem æqualem reuocandus, qui similis sit sectori alteri D A B: id est, cuius *Fig. 23*

angu

angulus æqualis ſit angulo A D B. Fiat vt G ad H; ita C E ad quartam I. Deinde inter duas C E & I, media proportionalis reperiatur: cui æqualis ſumatur D O: eóque radio, centro D arcus O P deſcribatur. Dico ſectorem D O P, eum eſſe qui quæritur; ſimilem ſcilicet eſſe ſectori D A B, æqualem verò ſectori C E F.

Figura Vigeſimatertia.



Demonſtratio.

Quod ſector D O P ſimilis ſit ſectori D A B notum eſt, cum vtriuſque idem ſit angulus D. Quod autem ſit æqualis ſectori C E F, probatur. Fiat angulus ODZ æqualis angulo E C F, & ducatur recta D Z. Quia igitur eſt vt angulus O D P ad angulum E C F, ſiue O D Z: ita ex ſuppoſitione eſt recta G ad H, aut ex conſtru

constructione C E ad I. Vt autem angulus O D P ad angulum O D Z; ita est sector O D P ad sectorem O D Z. Erit ergo vt recta C E ad rectam I; ita sector O D P ad sectorem O D Z. Quia verò tres rectæ C E, D O, I sunt continuè proportionales ex constructione, est enim D O posita media proportionalis inter C E & I; est autem sector D O Z similis sectori CEF, quorum ille est positus super primam C E trium proportionalium; hic verò super secundam D O: erit sector C E F ad sectorem D O Z, vt prima C E ad tertiam I. Sed sector D O P ad eundem sectorem DOZ, ita ostensus est se habere vt C E ad I. Ergo duo sectores C E F, D O P sunt æquales inter se. Sectorem igitur datum C E F ad alium æqualem D O P, & similem sectori dato D A B reuocauimus. Quod erat faciendum.

Corollarivm I.

Hoc ita soluto Problemate aperta est ratio conuertendi semicirculos super lateribus Polygonorum regularium quorumcumque, Quadratum, laterum numero superantium descriptos in circulum vnicum; qui minor futurus est necessariò, vt Prop. 38. ostensum est, circulo: cui Polygono circumscribitur. Vnde, vt mox patebit, habebitur spatium quoddam mixtum Polygono æquale. Fig. 24

Sit enim, verbi gratia, Pentagonum: super cuius lateribus semicirculi describantur: quorum vnus sit A L B & ductis radijs D A, D B à centro D Pentagoni, fiat sector D A F B; qui maior est per Prop. 38. Semicirculo A L B.

Figura Vigesimaquarta.

Habemus ergo sectores duos dissimiles, nimirum semicirculum ALB, & sectorem DAB: quorum anguli ad centra C & D, notam habent rationem. Nam licet spatium ad centrum C semicirculi, angulus propriè dici nequeat; duobus tamen angulis rectis æquale est, qui ad angulum D sectoris DAB, rationem habent duplam sesquialteram, vt patet; cum enim ad punctum statui possint quatuor anguli recti, quorum quinta pars est angulus ADB: erit idem ADB subdupla sesquialtera pars duorum rectorum. Hac igitur data angulorum ACB, ADB ratione, reuocari

potest

poteſt ſemicirculus ALB ad alium ſectorem æqualem & ſimilem ſectori DAB. Sumptis ſcilicet duabus lineis G, H; quarum illa, huius ſit ſubdupla ſeſquialtera: deinde his tribus G, H, & radio AC inuentâ quartâ proportionali I. Ac tandem inter AC & I, mediâ proportionali inuentâ. Cui ſit æqualis DO. Deſcribatur arcus OP. Erit ſector DOP æqualis ſemicirculo ALB: atque adeò totus circulus OP circumductus æqualis fiet omnibus ſemicirculis ſimul, omnibus lateribus Pentagoni, adiacentibus: cum omnium ſemicirculorum & ſectorum eadem ſit habitudo inter ſe: quæ eſt ſemicirculi ALB. & ſectoris DAB. Partes ſiquidem cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione.

His ita conſtitutis ſequitur triangulum DAB eſſe æquale ſpatio mixto: quod ſemiperipheria ALB, & arcu OVTP, & rectis lineis AO, BP continetur. Nam cum ſemicirculus ALB, & ſector DOP ſint æquales: dematur ſegmentum commune rectâ VT abſciſſum; & addantur duo triangula mixta AOV, BTP. Fiet triangulum DAB, præfato ſpatio mixto ſiue Lunulæ vtroque cornu minutæ ALBPTVOA æquale: atque adeo Pentagonum regulare (eadem enim eſt cæterorum triangulorum ratio) æquale eſt Meniſcis quinque vtroque cornu minutis. Quæ autem circa Pentagonum hic tradita ſunt: eadem omnia eodémque modo Polygonis omnibus regularibus æque conueniunt, vt fuſior eorum expoſitio iniri fruſtra videatur: Aduertas tantùm quanta ſeges rectilineorum curuilineis æqualium hinc enaſcatur. Fig. 24

COROLLARIVM. II.

Nec verò tantùm exhiberi poteſt Lunula cornibus minuta Fig. 24.

æqualis triangulo Iſoſceli; cuius angulus ad verticem, angulus ſit, regularis alicuius Polygoni circulo inſcripti: verùm etiam cuiuſcunque quantitatis fuerit ille verticis angulus, modò recto minor ſit; notámque rationem habeat ad duos rectos angulos. Si enim recto minor eſt verticis angulus; ſemicirculus, ſuper baſe tanquam diametro deſcriptus, cuiuſmodi eſt in figura ſemicirculus A L B, ſemper minor erit ſectore D A F B, vt in hac Prop. demonſtratum eſt, atque adeò ſector D O P æqualis ſemicirculo A L B ex eo domi poterit, formaríque ſpatium Lunare vtroque cornu deficiens, æquale triangulo Iſoſceli D A B, non ſecùs ac præſtitum eſt corollario præcedente.

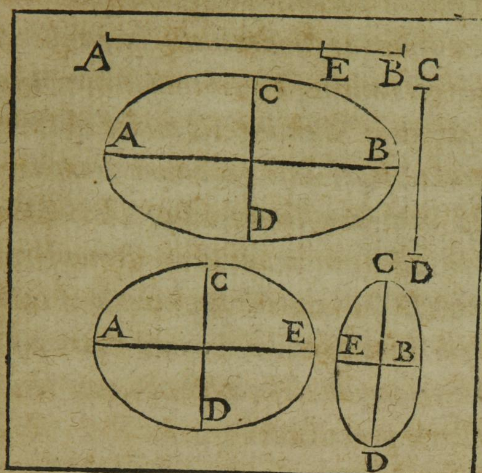
PROP. XL. THEOR.

Si fuerint duæ rectæ lineæ A B, C D: ſecetúrque ipſarum altera A B in quotcunque ſegmenta A E, E B. Ellipſis A C B D, cuius axes ſunt duæ illæ lineæ: æqualis eſt Ellipſibus, quarum axes ſunt ſingula ſegmenta lineæ A B, & linea inſecta C D cuiuſmodi ſunt Ellipſes A C E D, E C B D.

Demonſtratio.

Fig.25. Quamuis grauiſſimum curuilinea inter & rectilinea diſſidium intercedat: tantum tamen non eſt: vt omnem inter ea neceſſitudinem abrumpat; vt ex dictis hactenus videre eſt, clariuſque ex iis, quæ deinceps propoſiturus ſum, obſeruare licebit. En huc allatam Euclidis Propoſitionem primam libri ſecundi: Quid

Figura Vigesimaquinta.



Quid præ ipsâ rectilineum magis? Eandem tamen, cæteráſque omnes eiuſdem libri; omnes, quas Pappus, quas Apollonius, aliíque Authores non pauci circa rectangula ex varia lineæ rectæ ſectione, orta demonſtrarunt; ad circulos Ellipſéſue non minus pertinere fiet manifeſtum ex ſequentibus aliquot, reliquarum inſtar, Propoſitionibus, quas ſubiungam. Nunc ad rem. Certum eſt per Prop. 6. Archimedis lib. de Conoid. & Sphæroid. circulum, cuius diameter ſit media proportionalis inter axem maiorem AB, & minorem CD Ellipſeos ACBD; eidem Ellipſi æqualem eſſe: idémque in reliquis duabus Ellipſibus ACED, ECBD contingere. Ita vt ſufficiat duos hoſce poſtremos circulos ſimul, demonſtrare æquales primo circulo æquali, Ellipſi primæ ACBD. Quod ita conficitur. Quadratum mediæ proportionalis inter rectas

A B, C D æquale eſt rectangulo ſub A B & C D. Quadratum autem mediæ inter ſegmentum A E & C D æquale eſt rectangulo ſub A E & C D: eodémque iure Quadratum mediæ inter: E B & C D æquale erit rectangulo ſub eiſdem lineis E B & C D. Sed duo rectangula ſub A E, C D; ſub E B, C D æqualia ſunt per Prop. 1. lib. 2. Euclidis rectangulo ſub A B, & C D. Ergo & duo Quadrata duobus poſterioribus rectangulis æqualia, æqualia erunt Quadrato æquali, rectangulo primo ſub A B, C D. Sed per 2. lib. 12. circuli ita ſe habent vt à diametris Quadrata. Ergo circulus primus æqualis eſt duobus circulis reliquis. Atque adeò Ellipſis prima, cuius axes ſunt A B, C D; reliquis duabus quarum axes ſunt A E, C D; & E B, C D, æqualis erit. Quare. Si fuerint duæ rectæ lineæ, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

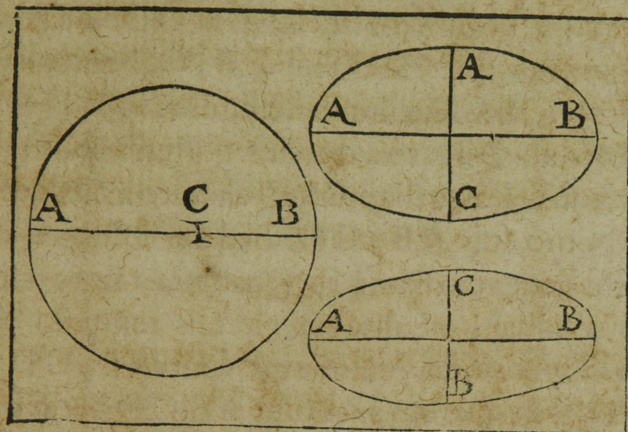
Fig. 25. *Ex huius Propoſitionis demonſtratione ſequitur: circulum, cuius diameter eſt media proportionalis inter totam A B, & alteram C D; æqualem eſſe circulis; quorum diametri ſunt mediæ proportionales inter inſectam C D, & ſegmenta ſingula A E, E B ſectæ lineæ A B. Id enim prius probari debuit: vt oſtenderetur Ellipſim A C B D æqualem eſſe duabus ſimul Ellipſibus A C E D, E C B D.*

PROP. XLI. THEOR.

Si recta linea A B ſecta ſit vtcumque in C. Circulus, cuius diameter eſt tota A B æqualis eſt

est Ellipsibus; quarum maior axis est tota A B. minor verò, singula totius A B segmenta, A C, C B.

Figura Vigesimasexta.



Demonstratio.

Propositio hæc, vt patet, secundam imitatur. Libri secundi Propositionem Euclidis. Nec methodo demonstratur, ab ea dissimili: quæ ad Antecedentem Propositionem demonstrandam adhibita fuit. Cum enim constet ex citata Propositione Euclidis, Quadratum totius lineæ A B æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub tota A B, & singulis segmentis A C, C B continentur. Rectangula autem sub tota A B & singulis eius segmentis, æqualia sint Quadratis linearum: quæ inter totam A B & singula eius segmenta sunt mediæ proportionales: & per 2. lib. 12. circuli ita inter se sint, vt à diametris Quadrata: erit circulus à diametro A B æqualis circulis omnibus à diametris, *Fig. 26.*

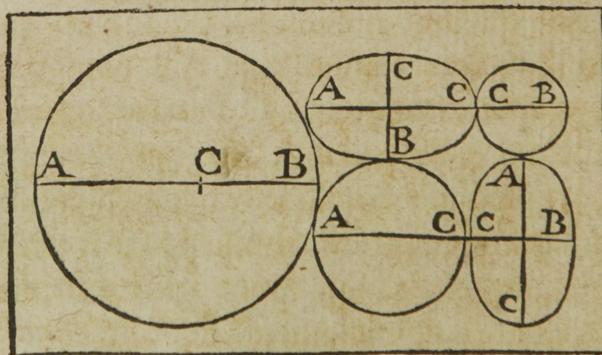
quæ

quæ ſunt mediæ illæ proportionales inter A B & eius
Fig. 26 ſingula ſegmenta. Sed circuli ſuper huiuſmodi diametris mediis proportionalibus, æquales ſunt Ellipſibus: quarum axes ſunt tota A B & ſingula eius ſegmenta per 6. Conoid. & Sphæroid. Archim. Ergo circulus à diametro A B, æqualis etiam erit Ellipſibus illis omnibus quarum maior axis eſt A B; minor verò ſingula totius A B ſegmenta. Quare. Si recta linea A B ſecta ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XLII. THEOR.

Si recta linea A B ſecta ſit vtcumque in C. Circulus, qui à tota deſcribitur; æqualis eſt & illis qui à ſegmentis vt diametris deſcribuntur, circulis, & Ellipſi bis, cuius axes ſunt ipſa ſegmenta A C, C B.

Figura Vigeſimaſeptima.



Expoſitio & Demonſtratio.

Fig. 27 Propoſitio hæc conſona eſt Propoſitioni quartæ libri ſecundi Eucl. quæ demonſtratione ſtabiliri debet,

ei

ei persimili : quæ ad præcedentes duas adhibita est, nec pluribus eget exponi : sicut nec cæteræ omnes, quæ ex variâ rectæ lineæ sectione, varia orta rectangula & Quadrata considerant. Semper enim eadem futura est vtrobique ratio : si loco Quadratorum, circuli assumantur; quorum diametri sint ipsa Quadratorum latera : loco verò rectangulorum assumantur vel Ellipses, quarum axes sint ipsa latera rectangulorum ; vel circuli, quorum diametri sint mediæ proportionales inter rectangulorum latera.

PROP. XLIII. THEOR.

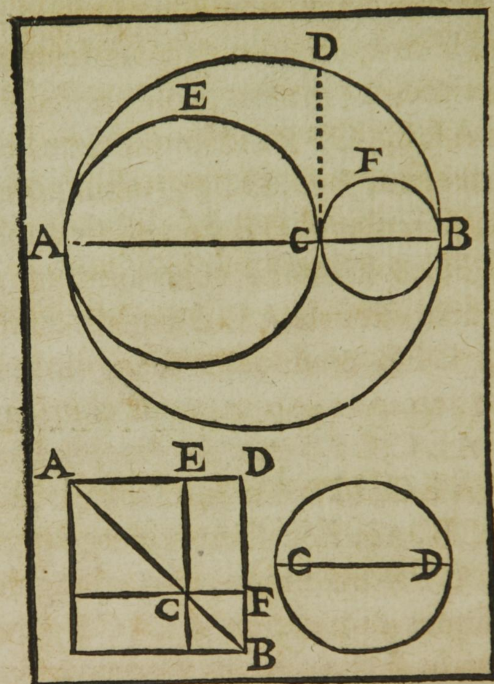
Complementum duorum quorumlibet semicirculorum, medium est proportionale inter ipsos totos circulos.

EXPOSITIO.

Sint duo quilibet circuli AEC, CFB : quorum diametri in vnam rectam lineam AB componantur, seséque propterea tangant in C. describatur autem circa diametrum AB circulus ADB : qui priores tanget in A & B ; duóque curuilinea triangula constituet ; quorum vtrumque à tribus semiperipheriis trium circulorum comprehenditur. Voco igitur duo illa curuilinea triangula, complementa duorum circulorum minorum ; eo plane modo ; quo vocat complementa Euclides duo rectangula ; quæ cum duobus Quadratis, quæ à duobus segmentis lineæ rectæ fiunt, Quadratum complent à tota linea descriptum. Complent Fig. 28

M enim

Figura Vigesimaoctaua.



enim duo huiusmodi curuilinea triangula duobus circulis AEC, CFB super segmentis AC, CB, descriptis addita, totum circulum super tota AB descriptum. Alterum horum triangulorum, quale est triangulum semicirculorum peripheriis ADB, AEC, CFB contentum; dici debet complementum duorum semicirculorum minorum: illúdque aio esse medium proportionale inter eosdem duos circulos minores: & probo.

Demonstratio.

Fig. 28 Per punctum C ducatur CD perpendicularis ad AB;

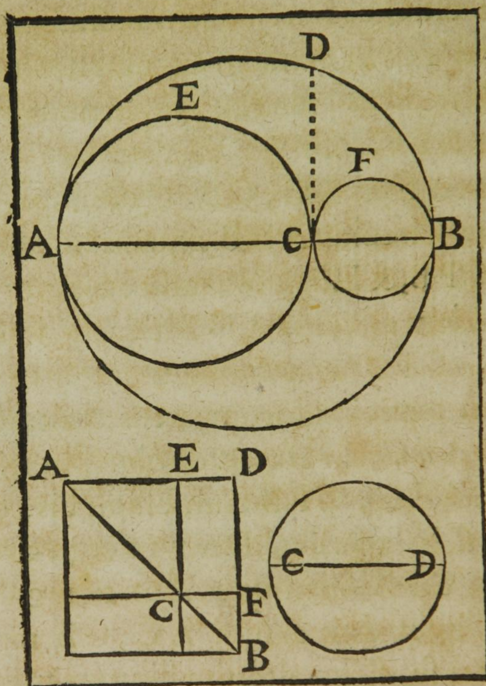
AB. Hæc, cum ſit media proportionalis inter A C, C B; latus eſt Quadrati æqualis rectangulo ſub A C, C B. Quod ſi circa eandem circulus deſcribatur: erit huiuſmodi circulus, medius proportionalis inter circulos duos A E C, C F B: idémque æqualis erit Ellipſi, cuius axes ſunt A C, C B. Quibus poſitis. Cum per Prop.42. Circulus A D B æqualis ſit duobus circulis A E C, C F B, & Ellipſi bis cuius axes ſunt A C, C B: Sit autem idem circulus A D B æqualis duobus circulis A E C, C F B & duobus triangulis curuilineis, quos trium ſemicirculorum arcus continent: erunt duo circuli A E C, C F B cum duobus illis triangulis; & duo circuli A E C, C F B cum Ellipſi bis, cuius axes ſunt A C, C B, æquales. Demptis ergo circulis duobus A E C, C F B vtrimque, duo triangula curuilinea, & Ellipſes duæ axium A C, C B remanebunt æqualia inter ſe. Ergo alterum illorum triangulorum nempe A E C F B D A æquale eſt Ellipſi, cuius axes ſunt A C, C B ſed huiuſmodi Ellipſis, æqualis eſt circulo cuius diameter eſt recta C D, vt paulo ante expoſui, & præterea eſt idem circulus medius proportionalis inter circulos A E C, C F B. Ergo triangulum illud curuilineum æquale eſt, vel Ellipſi axium A C, C B; vel circulo diametri C D; & eſt præterea medium proportionale inter eoſdem circulos A E C, C F B. Quare. Complementum duorum quorumlibet, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Hic obſeruare licet Quadratorum & circulorum conſo- Fig.28

 nantiam

Figura Vigesimaoctaua.



nantiam miram. Quæ vt planius exponatur. Fiat Quadratum, cuius diametur sit AB. Qua secta in C, & per C ductis duabus lineis, Quadrati lateribus parallelis fiant duo Quadrata minora AEC, CFB cum duobus complementis, quorum vnum est rectangulum EF. Patet ergo primò rectangulum EF esse medium proportionale inter duo Quadrata minora AC, CB; non secus ac triangulum curuilineum AECFBDA est medium proportionale inter duos circulos AEC, CFB. Secundò Quadratum, cuius diameter est media proportionalis inter duo segmenta AC CB diametri, totius Quadrati ADB; æquale est rectangulo EF, siue complemento minorum Quadratorum. Ita etiam

circulus,

circulus, cuius diameter eſt CD media proportionalis inter diametros AC, CB minorum circulorum; æqualis eſt oſtenſus triangulo curuilineo ſiue eorumdem circulorum complemento. Tertiò. Occurrit ſymbolizatio etiam (quod magis mirum) inter earum figurarum ambitus. Nam Quemadmodum duo minora Quadrata AC, CB Iſoperimetra ſunt Quadrato toti AB, vt norit quiuis Geometras; ita duo circuli AEC, CFB Iſoperimetri ſunt circulo maiori ADB. Adeo vt duæ peripheriæ duorum minorum circulorum ſimul, æquales ſint peripheriæ maioris circuli AED. Nam vt diameter AC ad peripheriam ſui circuli AEC: ita eſt diameter CB ad peripheriam ſui circuli CFB. Ergo Fig. 28
ita ſunt ambæ diametri ſimul, hoc eſt, tota AB, ad duas peripherias AEC, CFB, ſimul, vt diameter AC ad peripheriam AEC. Sed vt diameter AC ad peripheriam AEC; ita eſt diameter AB ad peripheriam ADB. Ergo ita eſt recta AB ad duas peripherias AEC, CFB ſimul, vt eadem recta AB ad peripheriam ADB ergo duæ ſimul peripheriæ AEC, CFB æquales ſunt peripheriæ ADB; hoc eſt, duo minores circuli Iſoperimetri ſunt circulo maiori ADB: aut etiam duo ſemicirculi minores, maiori ſemicirculo: eſt enim vtrique parti communis linea recta AB. Quod idem in Quadrato contingit ſunt nimirum duo triangula AEC, CFD Iſoperimetra maiori triangulo ADB: cuius eadem eſt baſis AB, cum baſi minorum triangulorum. Hæc autem æqualitas ambitûs tam in circulis quam in Quadratis non tantùm reperitur: quando diametri AB in duo ſegmenta AC, CB diuiduntur, vt in allatis ſchematibus factum eſt: verum etiam quando in plura, ſi ſuper ſingula

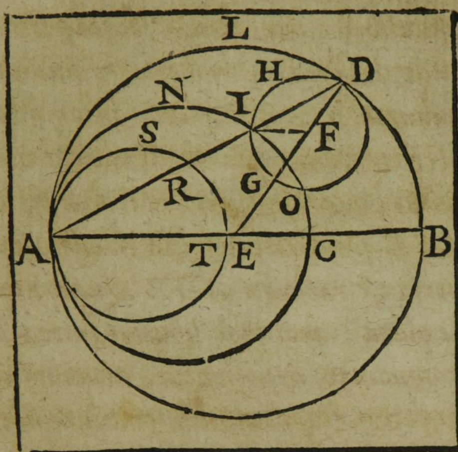
tam circuli, quàm Quadrata vel ſemicirculi & triangula deſcribantur. Quotquot enim circuli deſcribentur ſuper diametro AB in quotlibet partes diuiſâ; eorum omnium peripheriæ ſimul, æquales erunt peripheriæ vnius illius circuli ADB; cuius diameter AB æqualis eſt omnibus diametris minorum circulorum. Quod demonſtratione oſtendetur eadem plane; qua vſus ſum, vt probarem duos circulos AEC, CFB ſimul circulo ADB eſſe Iſoperimetros. Nec etiam diuerſa eſt ratio in ADB Quadrato, ſiue duo Quadrata ſiue plura, quotquot libuerit, circa diametrum AB omnibus communem deſignentur, modò ipſa tota abſumatur: horum enim Quadratorum omnium ſimul perimeter, ſolius Quadrati ADB perimetro eſt æqualis: non ſecùs ac diametri omnium minorum Quadratorum ſimul ſumptæ, æquales ſunt diametro AB maioris Quadrati ADB. Verùm hæc circulorum Iſoperimetria vniuerſalius proponetur Prop. 45. ſequente: ad quam viam aperiet proximum Theorema.

PROP. XLIV. THEOR.

Fig. 29 Si à duorum circulorum ſeſe interiùs tangentium contactu A recta quælibet A D emittatur; & ad punctum D, in quo linea A D circulo exteriori occurrit, ducatur ſemidiameter E D: in qua ſumpta D G æquali, rectæ C B; ſiue exceſſui diametri maioris circuli ſupra diametrum minoris, circa D G diametrum circulus deſcribatur centro F. Dico circulum hunc tranſiturum per punctum I, in quo recta A D circulum minorem A N C interſecat.

Demon

Figura Vigesimanona.



Demonstratio.

Iungatur F I. Quia est A D ad I D; vt A B ad C B (ductis enim rectis I C, D B, æquiangula forent duo triangula A I C, A D B) vt autem A B ad C B; ita est semissis lineæ A B ad semissem lineæ C B: hoc est, E D ad D F: erit A D, ad I D; vt E D ad F D. In triangulo igitur D A E recta I F parallela est basi A E; ac proinde triangulum D I F æquiangulum est triangulo D A E; & latera habet lateribus huius proportionalia. Æqualia sunt igitur duo latera F I, F D; sicut æqualia sunt E A, E D. Quare circulus centro F per D descriptus transit per I; in quo puncto recta A D circulum A N C intersecat. Si igitur, à duorum circulorum sese, &c. Quod erat demonstrandum.

PROP.

PROP. XLV. THEOR.

Fig. 29 Positis quæ in Antecedente Propositione: tria segmenta trium circulorum à recta A D, abscissa; similia sunt ad vtramque eiusdem lineæ A D partem duóque minora A N I, I H D simul, Isoperimetra sunt maiori A L D: sicut & duo A C I, D G I sunt segmento A B D Isoperimetra.

Demonstratio.

Quod abscissa segmenta tria à linea A D similia sint; clarum est. Cum enim duo triangula A C I, A B D (ductas concipe rectas C I, B D) sint æquiangula: erunt duo segmenta A C I, A B D; in quibus sunt anguli æquales; similia: similia proinde erunt & reliqua A N I, A L D. Segmento autem A L D simile est segmentum I H D: siquidem angulus A E D ad centrum æqualis est ostensus angulo IFD, item ad cētrum. Ergo tria illa segmenta semicirculo minora, similia sunt: ac proinde etiam reliqua semicirculo maiora, erunt similia inter se vt habet prior conclusionis pars.

Fig. 29 Secunda pars Propositionis quod segmenta duo A N I, I H D, segmento A L D sint Isoperimetra; sicut & duo A C I, I G D, segmento A B D: non aliter probabitur; quàm probatum est Propositione 43. eiúsve scholio duos circulos A E C, C F B illius schematis Isoperimetros esse circulo A D B. Nam per Propos. 13. lib. 5. Collectionum Pappi, vt recta A I ad arcum

Figura Vigesimanona.

cum A N I, quem abſcindit: ita eſt recta I D ad arcum I H D, quem abſcindit. Ergo ita ſunt duæ rectæ A I, I D ſimul, id eſt, tota A D; ad duos arcus A N I, I H D ſimul: vt A I ad arcum A N I; ſed vt recta A I, ad arcum A N I, ita eſt recta A D ad arcum A L D per citatam Pappi Propoſitionem. Ergo ita ſe habet recta A D ad duos ſimul arcus A N I, I H D; vt ipſa eadem A D ſe habet ad arcum A L D. Sunt ergo duo arcus ſimul A N I, I H D, æquales arcui A L D. Linea verò A D eſt communis duobus ſegmentis minoribus, & maiori A L D. Ergo totus ambitus duorum ſegmentorum, æqualis eſt perimetro totius ſegmenti A L D. Quod autem hic dictum eſt de ſegmentis ſemicirculo minoribus; non minus ſegmentis conueniunt ſemicirculo maioribus: quorum baſis, eadem eſt linea A D. Quare. Poſitis quæ in antecedente, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XLVI. THEOR.

Fig. 29. Iisdem positis. Si super media proportionali inter A I & I D, segmentum describatur simile segmento A L B, aut A N I, siue I H D (sunt enim hæc omnia segmenta paulò ante ostensa inter se similia) Dico segmentum illud æquale fore dimidio curuilineo triangulo A L D H I N A. Similiter si super eadem describatur segmentum semicirculo maius simile segmento A B D. Dico etiam illud fore æquale dimidio triangulo curuilineo A B D O C A si prius ab ipso toto triangulo demptum fuerit spatium I O à duobus arcubus minorum circulorũ interceptum.

Præparatio.

Reperiatur inter A C, C B media proportionalis: cui æqualis ponatur A T: circa quam circulus describatur secans in R rectam A D. Erit A R media proportionalis inter A I & I D. Nam est vt A C ad A T, ita A I ad A R; & vt A T ad C B; ita A R ad I D. Secatur enim A D in R & I similiter vt A B secatur in T & C. Ergo A R media est inter A I & I D; sicuti media est A T, inter A C, C B. Præterea segmentum A S R simile est segmento A L D, & segmentum A T R simile segmento A B D. Ostendi ergo debet iuxta sensum Propositionis segmentum A S R æquale esse dimidio trianguli curuilinei A I D arcubus A L D, A N I, I H D contenti: segmentum autem A T R æquale dimidio

trianguli

trianguli A O D arcubus ABD, A C O, & O D comprehensi; dempto prius à triangulo A O D spatio I O, vt exigit Propositio.

Figura Vigesimanona.

Demonstratio.

Quia similia segmenta A L D, A N I, I H D, A S R ita sunt inter se; vt Quadrata linearum A D, A I, A R, I D. Quadratum autem lineæ A I, & rectangulum sub A I, I D; & Quadratum lineæ I D sunt continuè proportionalia. Est verò rectangulum sub A I; I D, semissis excessus, quo totum Quadratum totius lineæ A D superat duo Quadrata linearum A I, I D per 4. lib. 2. Erunt etiam continuè proportionalia, segmentum A N I, & semissis excessus, quo segmentum totius A D, nempe A L D, superat duo segmenta A N I, I H D (qui excessus est triangulum curuilineum ADI) & segmentum I H D. Sed segmenta A N I, A S R, I H D sunt etiam continuè proportionalia. Ergo seg- *Fig. 29*

N 2 mentum

mentum A S R æquale eſt ſemiſſi trianguli curuilinei A D I. Neque enim plures eſſe poſſunt mediæ quantitates proportionales inter duas, ſi continua ſit proportio. Eodemmodo probabitur ſegmentum ſemicirculo maius ATR eſſe æquale dimidio trianguli curuilinei A O D mulctati ſpatio curuilineo I O. Nam ſegmentum ABD totius lineæ A D, ſuperat duo ſegmenta ACI, IOD linearum A I, I D, triangulo curuilineo A O D, ſi ab eo dematur ſpatium I O, in quo duo illa ſegmenta communicant. Ergo ſemiſſis huius trianguli A O D mulctati ſpatio I O, eſt medius proportionalis inter ſegmenta A C I, D O I abſciſſa à lineis A I, I D. Sed ſegmentum A T R eſt etiam medium proportionale inter eadem ſegmenta ACI, D O I. Ergo ſegmentum A T R æquale eſt ſemiſſi trianguli curuilinei AO D mulctati ſpatio I O. Quare iiſdem poſitis ſi ſuper media, &c. Quod erat probandum.

SCHOLIVM.

Fig. 29 *Hinc fit totum circulum A S R T eſſe æqualem dimidio ſpatio, quo circulus totius rectæ AB, ſuperat circulos A N C, D H I O, quorum diametri ſunt AC, C B, ipſius ſcilicet lineæ AB partes. Cum ſegmenta ſemicirculo tam minora inter ſe, quam maiora inter ſe eandem rationem ſeruent, rationem ſcilicet, quam habent Quadrata partium lineæ A D, etiam eandem retinebunt circuli integri ex duobus ſegmentis conflati. Quod idem ſuperiùs Prop. 43. oſtenſum etiam fuit: in qua ſegmenta æqualia in omnibus circu-*

lis

lis. Nempe ſemicirculi, à linea A C B abſcinduntur. Sequitur etiam ſegmentum circuli, qui ſit circuli A S R T duplus, ſegmento A S R ſimile; fore æquale triangulo curuilineo A D I. Erit enim ſegmentum circuli illius dupli, ſimile ſegmento A S R, eiuſdem ſegmenti etiam duplum: Ergo æquale dicto triangulo curuilineo. Vnde patet quid circa ſegmentum ſemicirculo maius concludendum ſit.

PROP. XLVII. PROBL.

Dato circulo triangulum curuilineum æquale definire.

Conſtructio & Demonſtratio.

Reſumatur figura Propoſitionis 43. in qua detur circulus C D: cui æquale triangulum curuilineum ſtatuendum ſit. Id variis modis nonnihil inter ſe diuerſis abſolui poteſt. Et quidem. *Fig. 28*

Primò ſi aſſumpta quælibet linea A B, quæ minor non ſit quàm dupla diametri C D, dati circuli; diuidatur in C; ita vt C D media proportionalis ſit inter eius partes A C, C B. Deinde tam circa totam A B, quam circa vtramque eius partem A C & C B ſemicirculi deſcribantur: eorum peripheriæ triangulum curuilineum conſtituent æquale dato circulo C D vt probatur ex allata demonſtratione citatæ Propoſitionis 43. Dixi verò totam C B non debere eſſe minorem quam duplam diametri dati circuli C D: alioquin enim linea A B ſecari non poſſet ita vt inter eius partes linea C D foret media proportionalis. Semiſſis

enim lineæ cuiuſuis eſt maxima linea media proportionalis inter partes, in quas ipſa diuidi poteſt.

Figura Vigeſima octaua.

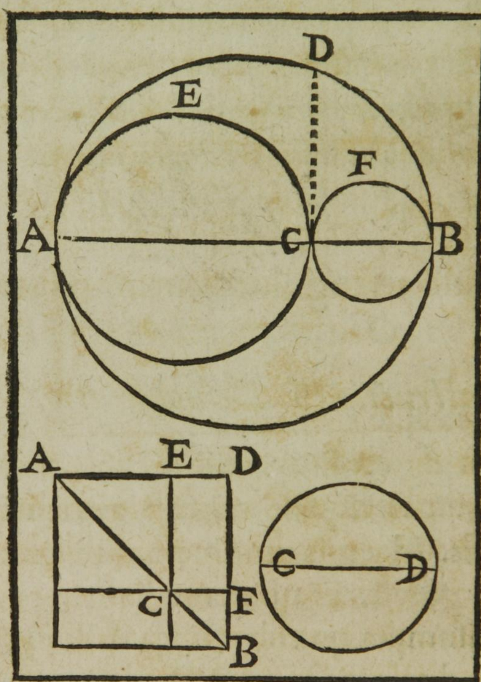
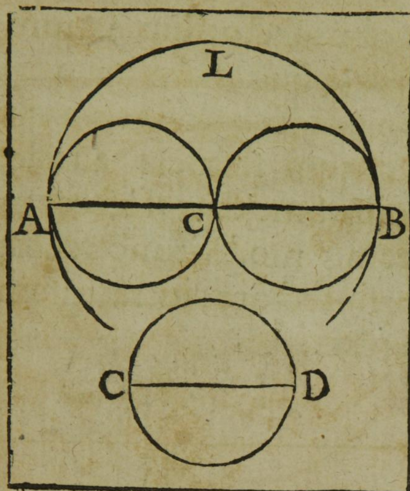


Fig. 28 Secundò dari poteſt alterutra linearum A C, C B. Tunc verò duabus A C, C D (quæ diameter eſt circuli dati) tertia reperiatur proportionalis C B: quæ cum prima A C in vnam rectam lineam A B componatur: circa quam ſicut & circa ſingulas A C, C B deſcribantur ſemicirculi: Eorum enim peripheriæ triangulum curuilineum efficient dato circulo C D æquale. Nec alia erit praxis, ſi linea quæuis C B detur minor, quam C D: reperietur enim tunc tertia proportionalis maior A C: & totum vt prius, Problema ſoluetur.

Tertiò

Figura trigesima.



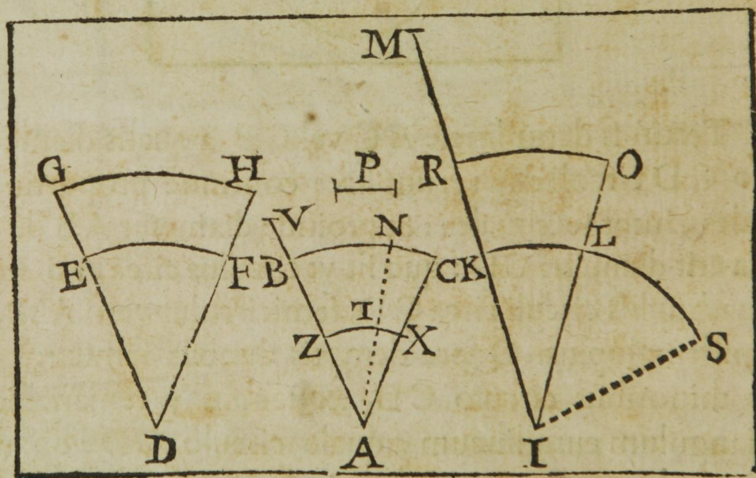
Tertiò ſi detur lineæ A C vel C B æqualis diametro C D circuli dati: erunt tres continuè proportionales, inter ſe æquales: & proinde diameter A B dupla erit diametri C D: quo fit vt circulus circa A B ſit quadruplus circuli circa C D; ſemicirculus verò ALB, eiuſdem duplus. Quare demptis duobus ſemicirculis minoribus circulo C D æqualibus; remanebit triangulum curuilineum æquale circulo C D: quod triangulum non immeritò Iſoſceles dici debet ob duo eius latera (quæ ſunt ſemicircumferentiæ duorum minorum circulorum) inter ſe æqualia. Triangulum igitur curuilineum, nec vnius generis tantùm, ſed multiplicis, dato circulo æquale definiuimus. Quod erat faciendum. *Fig. 30*

PROP.

PROP. XLVIII. PROBL.

Datis duobus ſectoribus parium circulorum ſiue æqualibus; ſiue etiam inæqualibus, modo eorum ratio nota ſit: alterutri æquale Quadrilaterum mixtum ſtatuere ad alterius arcum eiúſque radios. Siue extra ſectorem ipſum; ſiue intra eundem; modò tunc ſector mutandus, maior non ſit ſectore, intra quem fieri debet Quadrilaterum.

Figura Trigeſimaprima.



EXPOSITIO.

Fig.31 Problematis huius varij ſunt caſus. Primus eſt quando ſectores ambo æquales ſunt, vt A B C, D E F. Tunc verò ad arcum E F, eiúſque radios D E, D F productos licebit Quadrilaterum mixtum, quale eſt G E F H, apponere æquale alteri ſectori A B C non autem verſus

ſus centrum D, vt patet; æqualis enim iam eſt ſector D E F ſectori A B C.

Secundus caſus eſt: cum duo ſectores inæquales ſunt, vt A B C, I K L; & ad arcum K L ſectoris minoris apponendum eſt Quadrilaterum æquale ſectori maiori ABC. Tunc autem iuxta conditionem in textu additam; Quadrilaterũ illud extra ſectorem I K L exhibere licebit æquale ſectori A B C: quomodo enim intra componeretur: cum ſector ipſe totus I K L minor ſupponatur ſectore altero A B C.

Tertius caſus eſt: cum duo ſectores inæquales quidem ſunt: ſed Quadrilaterum minori ſectori æquale apponendum eſt ad arcum maioris. Vt, ſi ſectori I K L æquale Quadrilaterum fieri debeat ad arcum B C maioris ſectoris. Tunc tam vltra, quàm citra arcum B C, Quadrilaterum ſtatui poterit. His annotatis, caſus ſingulos ſoluemus.

Conſtructio & Demonſtratio primi caſus.

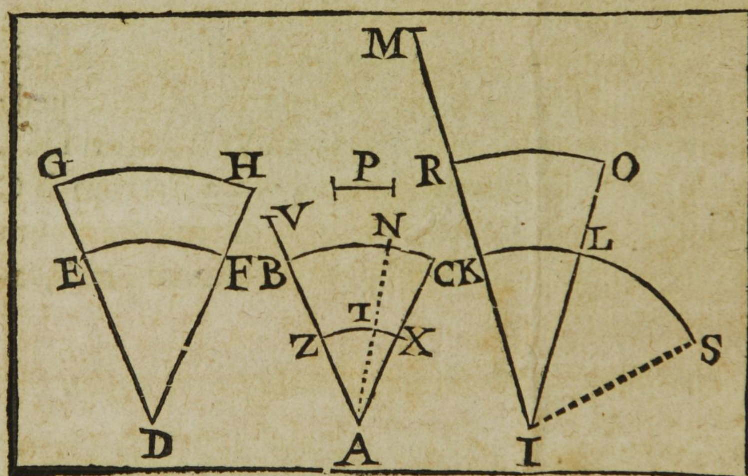
In hoc caſu, in quo duo ſectores A B C, D E F ponuntur æquales, expedita eſt ſolutio. Nam ſi reperiatur ſector D G H duplus ſectoris D E F, eo, quo in Elementis docetur, modo: erit Quadrilaterum GEFH æquale ſectori A B C. *Fig. 31*

Conſtructio ſecundi caſus.

Ex ſuppoſitione nota eſt ratio angulorum B A C, K I L: ſiue arcuum B C, K L; imò & ipſorum ſecto- *Fig. 31*

rum: cum eadem ſectorum ſit, quæ angulorum, ſiue arcuum. Sit ergo data ratio eadem, quæ eſt MK ad KI: Et inter totam MI, & conſequentem KI, fiat media proportionalis IR. Quo radio centro I deſcribatur arcus RO. Dico mixtum Quadrilaterũ RKLO, æquale eſſe ſectori ABC: atque ita Problemati, quoad hunc caſum, ſatisfactum eſſe.

Figura Trigeſimaprima.



Demonſtratio.

Fig. 31 Producatur arcus KL vſque ad S, ita vt LS ſit æqualis arcui BC, & ducatur radius IS. Erit ſector ILS æqualis ſectori ABC. Hunc ergo oſtendo æqualem eſſe Quadrilatero RKLO. Quia tres lineæ IK, IR, IM ſunt ex conſtructione continuè proportionales

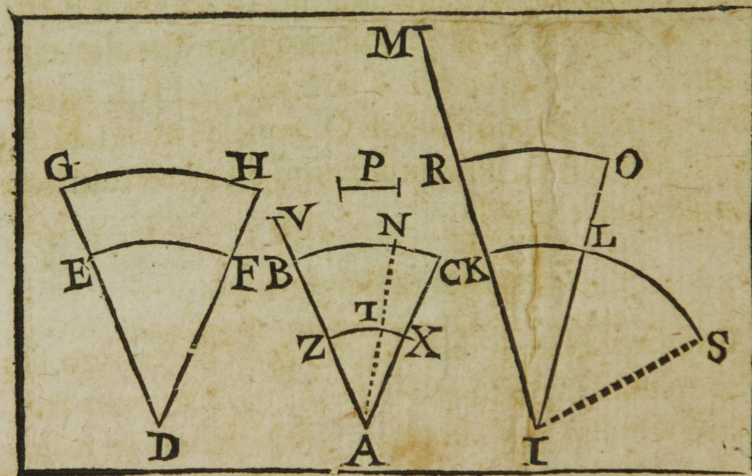
portionales: ita erit ſector I K L ſuper primam, ad ſectorem I R O ſimilem, ſuper ſecundam I R: vt eſt prima linea I K ad tertiam I M. Sed vt I K ad I M; ita eſt ſector I K L ad ſectorem I K S. Nam ex hypotheſi vt I K ad K M; ita ſector I K L ad ſectorem A B C, vel I L S. Ergo componendo vt I K ad I M, ita ſector I K L ad ſectorem I K S. Cum igitur eadem ſit ratio ſectoris I K L tam ad ſectorem I R O; quam ad ſectorem I K S: ſectores illos æquales eſſe neceſſe eſt. Dematur ſector communis I K L remanebit Quadrilaterum R K L O æquale ſectori I L S, ſiue ſectori A B C. Præſtitum ergo eſt quod caſu hoc ſecundo quærebatur.

Conſtructio tertij caſus.

Dati ſint ſectores duo I K L, A B C: quorum ille minor ſit iſto: atque adeo in iſto Quadrilaterum mixtum fieri queat verſus centrum A æquale dato ſectori I K L. Sit ergo data ratio ſectoris minoris I K L ad maiorem A B C eadem, quæ eſt inter I K, ſiue A B ad A V. Et ponatur arcus B N æqualis arcui K L; ducaturque recta A N: erit ſector A B N æqualis ſectori I K L. Eſt ergo ſector A B N ad ſectorem A B C; vt recta A B ad A V. Ergo etiam ita eſt ſector A B C ad ſectorem A N C; vt recta A V ad B V per diuiſionem rationis contrariam. Quia igitur nota eſt ratio ſectoris A B C ad ſectorem A N C: poterit ſector A N C reuocari ad ſectorem ſimilem ſectori A B C per Prop. 39. Si nimirũ fiat vt A V ad B V; ita A N ſiue *Fig. 31*

A B ad quartam P. tum inter A B & P, media proportionalis reperiatur: cui fiat æqualis A Z; eóque radio centro A describatur arcus Z X: erit enim sector A Z X æqualis sectori A N C ex 39. citatâ Prop. Quo posito dico Quadrilaterum B Z X C æquale esse sectori I K L siue A B N.

Figura Trigesimaprima.



Demonstratio.

Fig. 31 Duo sectores A N C, A Z X æquales sunt ex constructione. Dematur sector communis A T X. Remanebit Quadrilaterum mixtum N T X C æquale sectori AZT. Addatur commune Quadrilaterum BZTN: fiet totum Quadrilaterum B Z X C æquale. Sectori A B N siue I K L. Sector ergo I K L reuocatus est ad Quadrilaterum intra maiorem sectorem eiúsque arcui B C adiacet. Quod iubebatur.

SCHO

SCHOLIVM.

Affinis est hæc Propositio Propositioni 39. proinde ad illam allata corollaria, etiam in hac locum habent. Poterit itaque mixtum Quadrilaterum fieri, cuius vnum latus sit arcus dati sectoris, æquale circulo, cuius radius radio sectoris sit æqualis iuxta huius Propositionis conditiones. Poterit vicissim armilla siue orbis siue extra circulum siue intra componi æqualis sectori dato.

PROP. XLIX. PROBL.

Dato sectori A B C ad centrum, sectorem æqualem ad circumferentiam exhibere.

Figura Trigesimasecunda.



Constructio & Demonstratio.

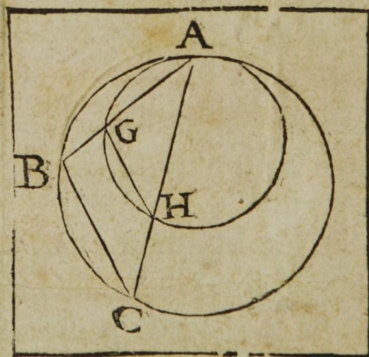
Chordæ A C arcum sectoris subtendenti parallela per centrum A ducatur D E. Tum ad punctum D, vel *Fig. 32*

E, ducantur rectæ B D, C D. Dico ſectorem D B C æqualem eſſe ſectori A B C ad centrum. Patet. Nam triangula B A C, B D C ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis ſunt æqualia. Addatur commune ſegmentum B C. Fiet ſector D B C ad circumferentiam, æqualis ſectori A B C ad centrum. Quod fieri debuit.

PROP. L. THEOR.

Si à duorum circulorum A B C, A G H ſeſe tangentium contactu A, duæ rectæ A B, A C intra ipſos cadant: hæ tam ex ipſis circulis, quam ex interiectâ Lunulâ per contactum, partes ſimiles intercipient.

Figura Trigeſimatertia.



Demonſtratio.

Fig. 33. Ductæ duæ rectæ A B, A C, occurrant circulo exteriori in B & C; circulo verò interiori in G & H:

&

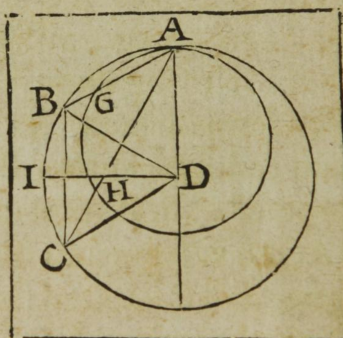
& tam B & C: quàm G & H rectis lineis iungantur. Erunt rectæ B C, G H inter se parallelæ. Nam cum ex demonstratione prioris partis Propositionis 45. constet lineam A B duo similia segmenta A B, A G abscindere: illis autem segmentis insistant ad circumferentiam anguli A C B, A H G: eos æquales esse necesse est. At angulus A H G externus est; internus autem A C B. Hoc cum ita sit, ita erit A C ad A H; vt B C ad G H. Ergo ita est triangulum A B C ad triangulum A G H; vt segmentum B C ad segmentum GH per 22.lib.6. Et Permutando. Ita triangulum ABC ad segmentum B C; vt triangulum A G H ad segmentum GH. Et Componendo. Ita sector A B C ad circumferentiam, ad segmentum B C; vt sector AGH, ad segmentum G H. Et Permutando. Ita sector ABC, ad sectorē AGH; vt segmentũ BC ad segmentum G H. Sed segmentũ B C ita est ad segmentũ G H; vt circulus A B C est ad circulum A G H per 12. Prop. huius. Ergo sector A B C ita est ad sectorem A G H vt circulus totus A B C, ad totum circulum A G H & per Diuisionem rationis contrariam, ita est excessus maioris sectoris A B C (qui excessus est Quadrilaterum mixtum G B C H) supra minorem A G H, ad ipsum minorem sectorem; vt excessus maioris circuli (qui excessus est Lunula per contactum) ad ipsum minorem circulum. Et permutando. Ita est mixtum Quadrilaterum GBCH, ad Lunulam, vt sector AGH ad suum circulum; vel etiam vt sector A B C ad circu-
lum

lum ſuum eadem enim eſt ratio vtriuſque ſectoris ad ſuum circulum, vt oſtenſum eſt. Si igitur, à duorum circulorum, &c. Quod erat probandum.

PROP. LI. PROBL.

A quauis Lunula per contactum imperatam partem abſcindere per duas lineas rectas.

Figura Trigeſimaquarta.



Conſtructio & Demonſtratio.

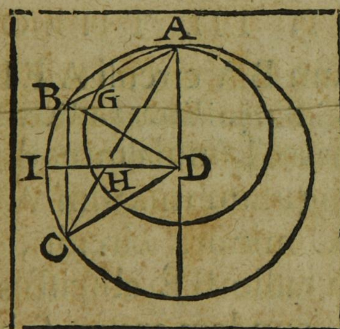
Fig. 34 Hæc Propoſitio quoddam quaſi Corollarium eſt ex præcedenti emanans. Sit ergo in figurâ ſimili abſcindenda pars ſexta Lunulæ, & quidem per duas rectas lineas. Sit arcus B C ſexta pars totius circumferentiæ, ita abſciſſus à chorda B C, vt ipſa ſit parallela diametro communi A D circulorum, adeóque per contactum A tranſeunti. Tum à contactu A per B & C, rectæ emittantur circulo minori occurrentes in G

&

& H. Dico Quadrilaterum mixtum G B C H ſextam eſſe partem totius Lunulæ.

Nam ductis lineis D B, D C à centro D circuli maioris, ſector D B C eſt ſexta pars totius circuli A B C. Sed ſector A B C ad circumferentiam eſt in hoc caſu propter parallelas A D, B C, æqualis ſectori D B C. Ergo & ipſe A B C ſexta pars eſt circuli A B C. Sed per Prop. antecedentem duæ lineæ A B, A C tam ex circulis, quàm ex Lunula partes ſimiles abſcindunt. Ergo mixtum Quadrilaterum G B C H ſexta pars eſt totius Lunulæ propoſitæ. Solutum ergo eſt propoſitum Problema vt oportebat. *Fig. 34.*

Figura Trigeſimaquarta.



SCHOLIVM.

Quomodo autem applicari debeat recta B C ſextam partem totius peripheriæ ſubtendens, ita vt parallela ſit diametro A D acta per circulorum centra, eorúmque contactum A: paucis accipe. Ducito radium D I perpendicularem

ad diametrum AD: & à puncto I, utrimque repone usque ad B & C semissem arcûs, qui sit sexta pars peripheriæ totius circuli; tum ducito rectam B C. Hæc enim est parallela diametro AD. Constat ex Elementis.

Porrò non tantùm uti licet rectâ B C subtendente sextam partem peripheriæ circuli exterioris: sed assumi etiam poterit chorda subtendens sextam partem peripheriæ circuli interioris cuiusmodi foret recta connectens puncta G, H: quæ, ut prior B C, applicabitur ita ut sit parallela diametro AD, ductâ ad AD perpendiculari ex centro circuli minoris. Denique non omittendum. Quod si plures circuli describantur sese tangentes in A; Lunulas omnes similiter secari à rectis AB, AC; earúmque partem quæsitam inter easdem intercipi.

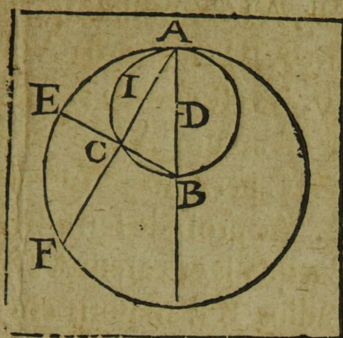
PROP. LII. THEOR.

Fig. 35 Si circa radium B A circuli A E F, describatur circulus A C B: quilibet radius B E maioris circuli abscindit ex Lunula inter duos circulos intercepta triangulum mixtum A E C æquale segmento A I C minoris circuli, quod arcus A C ab eodem radio B E abscissus constituit cum recta A C, eundem arcum subtendente.

Demonstratio.

Fig. 35. Producatur A C donec circulo maiori occurrat in F. Recta A F abscindit ex duobus circulis segmenta A E F, A I C similia. Habent ergo inter se eandem rationem quam inter se obseruant duo circuli. Sed circu

Figura Trigeſimaquinta.



circulus A E F Quadruplus eſt circuli A C B. Ergo Quadruplum erit ſegmentum A E F ſegmenti A I C. Sed ſegmentum A E F bifariam diuiditur à radio B E. Ergo ſemiſegmentum A E C duplum eſt ſegmenti A I C. Diuiditur ergo ſemiſegmentum illud A E C in duas partes æquales ab arcu A I C. Hoc eſt, triangulum mixtum A E C arcubus A C, A E & rectâ E C circumſcriptum æquale eſt ſegmento A I C. Quare. Si circa radium B A circuli, &c. Quod erat probandum.

PROP. LIII. THEOR.

Iiſdem poſitis, idem radius B E maioris circuli abſcındit in vtroque circulo duos arcus A E, A C à contactu A inchoatos, æquales.

Demonſtratio.

Ducta à contactu A per C recta linea, donec cir- *Fig. 35*

culo exteriori occurrat in F, Abſcindit ex circulis duo ſegmenta A E F, A I C ſimilia: Ergo ita ſe habet chorda A F ad arcum A E F vt chorda A C ad arcum A I C. Et permutando. Ita eſt chorda A F ad chordam A C; vt arcus A E F ad arcum A I C. Sed chorda A F eſt dupla chordæ A C per 3. lib. 3. Ergo arcus A E F duplus eſt arcûs A I C. Ac proinde ſemiſſis arcus A E F, hoc eſt, arcus A E æqualis erit arcui A I C. Quare. Iiſdem poſitis idem radius B E maioris circuli, &c. Quod erat probandum.

FINIS.

Fig.19. pag.66.

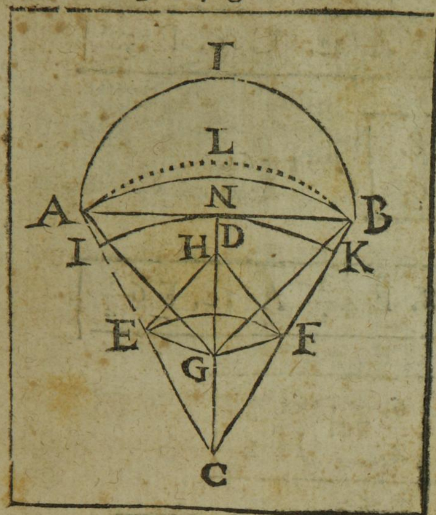


Fig.25. pag.86.

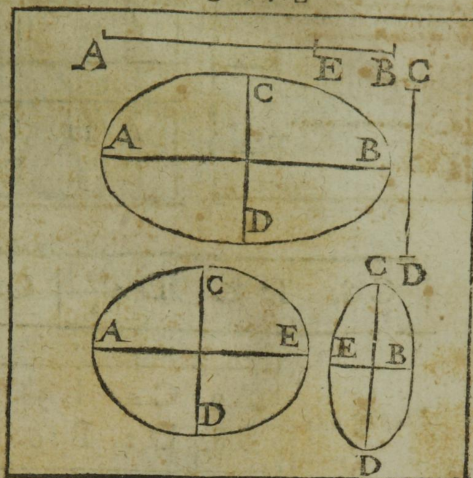


Fig.29. pag.100.

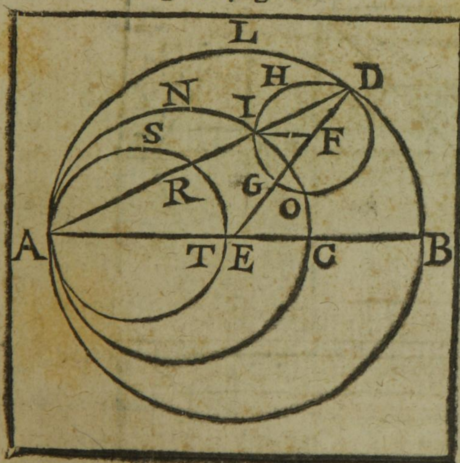
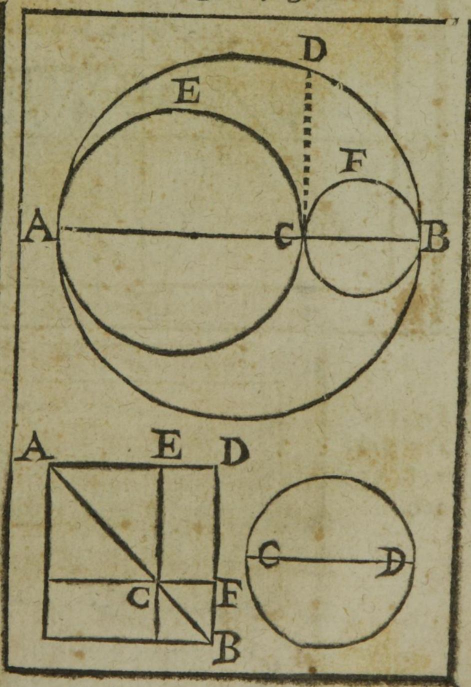


Fig.28. pag.101.



Pro pag. 10.

A		
B		E
C		
D		F

Pro pag. 54.

A 12.	B 3.	A 12.	C 6.	B 3.

A 12.	C 8.
B 3.	D 6.

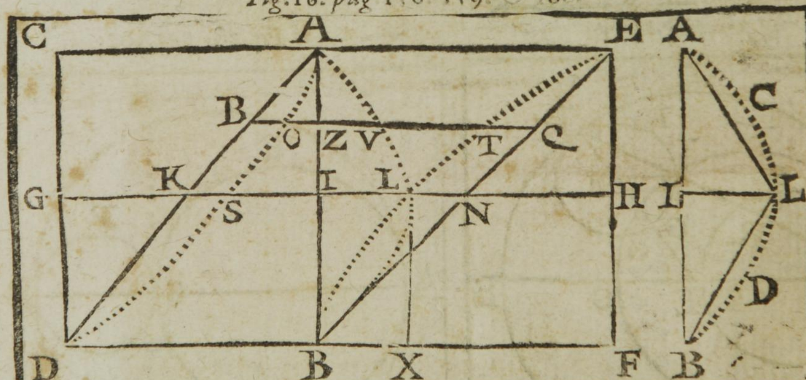
Pro pag. 64.

C 8.	D 6.	E $4\frac{1}{2}$	C 8.	E $4\frac{1}{2}$	A 12.	F $6\frac{3}{4}$

Pro pag. 65.

A 9.	C 4.	E 36	G 6.	vel	G 3
B 8.	D 2.	F 16.	H 4.		H 2

Fig. 18. pag. 158. 159. & 160.



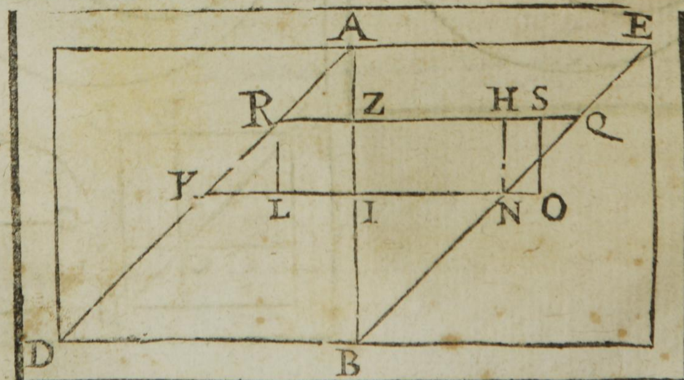


Fig. 21. Pro pag. 158. 159. 160.